الدرس 6

النهايات والمُتتاليات

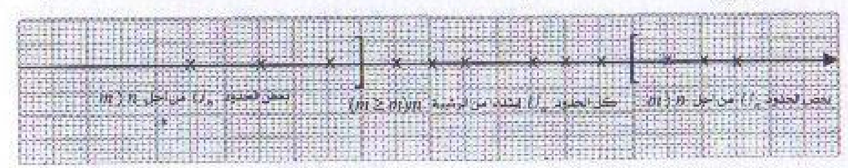
1 - نهاية متتالية (تذكير)

1 - 1 نهاية حقيقية لمتتالية عددية

تعريف

نقول أن العدد الحقيقي ℓ نهاية لمتتالية (U_n) يعني أن كل مجال مفتوح مركزه ℓ يشمل كل حدود هذه المتتالية ابتداء من رتبة معينة ونكتب :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\ell$ أو $\lim U_n=\ell$ و في هذه الحالة نقول ان المتتالية (U_n) متقاربة.



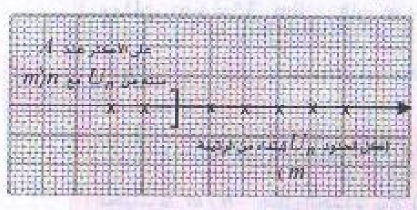
ملاحظة

1) إذا كانت (U_n) متقاربة فإن نهايتها وحيدة
2) إذا كانت (U_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غير موجودة).
3) كل متتالية حدودها موجبة لها نهاية موجبة أو معدومة.

مثال -

المتتاليات المعرفة بـ $U_n=\frac{1}{n}$, $V_n=\frac{1}{n^3}$, $W_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ هي متتاليات متقاربة نحو الصفر لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} Vn = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$

1 - 2 نهاية غير منتهية لمتتالية عددية



نقول ان متتالية (U_n) تقبل نهاية $(+\infty)$ يعني ان كل مجال مفتوح من الشكل $]A,+\infty[$ يشمل كل حدود هذه المتتالية ابتداء من رتبة معينة و نكتب :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=+\infty$

ويعني ذلك أن حدود المتتالية (U_n) تنتهي بتجاوز أي عدد حقيقي A مهما كان كبيرا.

ملاحظة

الكتابة $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=-\infty$ تعني ان كل مجال مفتوح من الشكل $]-\infty,A[$ يشمل كل حدود المتتالية (U_n) ابتداء من رتبة معينة.

مثال -

المتتاليات $U_n=n^2$, $V_n=n^3$, $W_n=\sqrt{n}$ ، $S_n=\sqrt{n+1}$ متتالية لها النهاية $(+\infty)$ و بالتالي فهي متباعدة.

1 - 3 دراسة تقارب متتالية هندسية

دراسة تقارب متتالية هندسية كيفية ذات الحد العام $a\,q^n$ يقودنا إلى دراسة تقارب المتتالية الهندسية ذات الحد العام q^n .

مبرهنة

q عدد حقيقي

- إذا كان $-1\langle q \rangle 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$
- إذا كان $q=0$ أو $q=1$ فإن المتتالية q^n ثابتة
- إذا كان $q\rangle 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$
- إذا كان $q\leq -1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ غير موجود.

مثال -

1) لتكن $U_n = 5(\frac{-3}{4})^n$

بما أن $-1 < \frac{-3}{4} < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} (\frac{-3}{4})^n = 0$ و منه $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

إذن المتتالية (U_n) متقاربة نحو الصفر.

2) لتكن $V_n = 2\times 3^n$

بما أن $\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ و منه (V_n) متتالية متباعدة.

تمرين تدريبي 1

(U_n) متتالية معرفة بالعبارة $U_n = \frac{2n+3}{n+2}$ نهايتها 2 أوجد عدد طبيعي m بحيث لما $n > m$ كل الحدود U_n تنتمي إلى المجال $I =]1,99;2,01[$

✓ الحل

الحدود U_n تنتمي إلى المجال $]1,99;2,01[$ يعني أن $1.99 < \frac{2n+3}{n+2} < 2.01$ و بطرح 2 من حدود هذه الأخيرة نجد $-0.01 < \frac{2n+3}{n+2} - 2 < 0.01$ أي $-0.01 < \frac{-1}{n+2} < 0.01$ و بالضرب في (-1) نجد $-10^{-2} < \frac{1}{n+2} < 10^{-2}$ و بالضرب في $(n+2)10^2$ نجد

$-(n+2) < 10^2 < n+2$ ..... (I)

المتباينة $-(n+2) < 10^2$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n إذن المتباينة المضاعفة (I) تكافئ $10^2 < n+2$ أي $98 < n$ منه نستنتج أن $m = 98$

بالتالي المجال $]1.99;2.01[$ يشمل كل حدود المتتالية (U_n) ابتداء من الرتبة 98 .

تمرين تدريبي 2

ادرس تقارب المتتاليات $U_n = \frac{3}{4^n}$ ، $V_n = 5(\sqrt{2})^n$ ، $W_n = \frac{(-4)^n}{5}$ ، $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} u_p$

✓ الحل

نلاحظ أن (U_n) ، (V_n) ، (W_n) متتاليات هندسية

- بما أن $-1 < \frac{1}{4} < 1$ فإن $\lim (\frac{1}{4})^n = 0$ و منه $\lim U_n = 0$ إذن (U_n) متقاربة نحو الصفر.
- بما أن $1 < \sqrt{2}$ فإن $\lim (\sqrt{2})^n = +\infty$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ إذن (V_n) متتالية متباعدة.

- بما أن $-4 \le -1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} (-4)^n$ غير موجودة و منه المتتالية (W_n) متباعدة.
- (U_n) متتالية هندسية بالتالي S_n مجموع n حد الأولى المتعاقبة من متتالية (U_n) حدها الأول $U_0 = 3$ و أساسها $\frac{1}{4}$.

إذن $S_n = 3 \times \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = 4(1-(\frac{1}{4})^n)$

- بما أن $\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{4})^n = 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} S_n = 4$ و منه المتتالية (S_n) متقاربة نحو العدد 4.

2 - نظريات حول النهايات

2 - 1 المتتاليات من الشكل $U_n = f(n)$

مبرهنة

f دالة معرفة على مجال $]a, +\infty[$ و (U_n) متتالية معرفة ب $U_n = f(n)$

و ℓ يمثل عددا حقيقيا أو $+\infty$ أو $-\infty$

إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$

مثال -

$U_n = \frac{2}{n+1}$ ، الدالة f المعرفة ب $f(x) = \frac{2}{x+1}$ نهايتها الصفر لما $x \to +\infty$

و عليه فالمتتالية (U_n) نهايتها 0 .

2 - 2 المتتاليات من الشكل $U_n = f(V_n)$

مبرهنة

f دالة معرفة على مجال I و كل حدود متتالية (V_n) تنتمي إلى I .

α ، β عددان حقيقيان أو يمثلان $+\infty$ أو $-\infty$

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} V_n = \alpha$ و إذا كانت $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ فإن $\lim_{n\to+\infty} f(V_n) = \beta$

مثال -

(V_n) متتالية معرفة ب $V_n = \sqrt{3+\frac{1}{n+1}}$

بوضع $U_n = 3+\frac{1}{n+1}$ تصبح $V_n = \sqrt{U_n}$ و بالتالي $V_n = f(U_n)$ حيث $f(x) = \sqrt{x}$

بما أن $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$ و $\lim_{x\to 3} f(x) = \sqrt{3}$ فإن $\lim_{n\to+\infty} V_n = \sqrt{3}$

نتيجة

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_{n+1} = f(U_n)$

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$ و f مستمرة عند ℓ فإن $\ell = f(\ell)$ (ℓ حل لـ $x = f(x)$)

الإثبات

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$ و إذا كانت f مستمرة عند ℓ ($\lim_{x\to\ell} f(x) = \ell$) في المبرهنة السابقة تسمح لنا بالتأكيد أن* $\lim_{n\to+\infty} f(U_n) = f(\ell)$.

و من جهة أخرى المتتالية (U_{n+1}) نهايتها ℓ لأن حدودها هي نفس حدود المتتالية (U_n) ما عدا U_0

و بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1} = f(U_n)$

فإن المتتاليتين (U_{n+1}) و $f(U_n)$ متساويتان و بالتالي لهما نفس النهاية أي $\ell = f(\ell)$

مثال -

(U_n) متتالية متقاربة معرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ $\begin{cases} U_{n+1} = \sqrt{3+U_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$

أوجد $\lim_{n\to+\infty} U_n$

الحل

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = \sqrt{3+x}$ و منه $U_{n+1} = f(U_n)$

بما أن (U_n) متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$ و $\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \ell$ و $\ell \in \mathbb{R}$

و بما أن f مستمرة عند ℓ فإن $\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = f(\ell)$

إذن ℓ هو جذر للمعادلة $x = f(x)$.

$x = f(x)$ يكافئ $x^2 - x - 3 = 0$ و $x \geq 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-3) = 13$

$\Delta > 0$ و منه المعادلة $x^2 - x - 3 = 0$ لها حلان هما $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ و $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

بما أن $x_2 < 0$ فإنه مرفوض و بالتالي $\ell = x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

إذن $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

2 - 3 نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر

القواعد المتعلقة بنهايات الدوال عند $(+\infty)$ تبقى صحيحة بالنسبة إلى المتتاليات وخاصة نهاية الجمع و الجداء و حاصل قسمة متتاليتين.

أما بالنسبة إلى نهاية المتتالية باستعمال الحصر لدينا المبرهنات التالية:

مبرهنة 1

(U_n) ، (V_n) ، (W_n) ثلاث متتاليات عددية ، ℓ عدد حقيقي.

إذا كان ابتداء من عدد طبيعي m لدينا $W_n \le U_n \le V_n$

و إذا كانت $\lim W_n = \lim V_n = \ell$

فإن $\lim U_n = \ell$

مبرهنة 2

ℓ عدد حقيقي. إذا كان ابتداء من عدد طبيعي m لدينا $|U_n - \ell| \le V_n$ و $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$

فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$

مبرهنة 3

(U_n) و (V_n) متتاليتان عدديتان

- إذا كان من أجل كل $n \ge m$ لدينا $U_n \ge V_n$ و $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

- إذا كان من أجل كل $n \ge m$ لدينا $U_n \le V_n$ و $\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$

فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

تمرين تدريبي 1

ادرس تقارب المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $U_n = \frac{2n+\cos n}{2n-\sin n}$

الحل

- من أجل كل عدد طبيعي لدينا $-1 \le \cos n \le 1$

إذن $-1+2n \le 2n+\cos n \le 1+2n$ ....(1)

- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $-1 \le \sin n \le 1$

إذن $-1+2n \le 2n-\sin n \le 1+2n$

و بما أن حدود المتباينة المزدوجة موجبة فإنه نستنتج بالقلب

$\frac{1}{1+2n} \le \frac{1}{2n-\sin n} \le \frac{1}{-1+2n}$ ....(2)

بضرب حدود المتباينتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد ،

$\frac{-1+2n}{1+2n} \le \frac{2n+\cos n}{2n-\sin n} \le \frac{1+2n}{-1+2n}$

و بما أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2n}{-1+2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1+2n}{1+2n} = 1$ فإنه حسب نظرية الحصر $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$

تمرين تدريبي 2

(V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $V_0=1$ و $V_{n+1}=\sqrt{V_n+6}$

أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $0\le V_n\le 3$

ب) ادرس تقارب المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n=\frac{V_n}{n+2}$

الحل

أ) نسمي p_n الخاصية " $0\le V_n\le 3$ "

- p_0 صحيحة لأن $V_0=1$ و $0\le 1\le 3$
- نفرض أن p_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n\ge 0$ أي $0\le V_n\le 3$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة اي $0\le V_{n+1}\le 3$

من الفرض لدينا $0\le V_n\le 3$ و بإضافة 6 إلى حدود هذه المتباينة نجد $3\le V_n+6\le 9$

بالمرور الى الجذر نجد $\sqrt{3}\le\sqrt{V_n+6}\le 3$ اي $0\le\sqrt{3}\le V_{n+1}\le 3$ ومنه p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n .

ب) بما ان $0\le V_n\le 3$ فإن $0\le\frac{V_n}{n+2}\le\frac{3}{n+2}$

و بما ان $\lim\frac{3}{n+2}=0$ فإنه حسب نظرية الحصر نجد $\lim_{n\to+\infty}\frac{V_n}{n+2}=0$

و عليه فالمتتالية (U_n) متقاربة نحو الصفر.

تمرين تدريبي 3

ادرس تقارب المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة:

$V_n=3^{n+2}-5^n$

الحل

المتتاليتان اللتان حداهما العام 5^n و 3^{n+2} هندسيتان اساساهما على الترتيب 5 و 3

و بما ان $5\rangle 1$ و $3\rangle 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}5^n=\lim_{n\to+\infty}3^{n+2}=+\infty$ و بالتالي نستنتج:

$\lim_{n\to+\infty}V_n=+\infty-\infty$ حالة عدم التعيين.

V_n يكتب $V_n=3^n(3^2-\frac{5^n}{3^n})=3^n(9-(\frac{5}{3})^n)$

بما ان $\frac{5}{3}\rangle 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}(\frac{5}{3})^n=+\infty$ و منه نستنتج $\lim_{n\to+\infty}\left[9-(\frac{5}{3})^n\right]=-\infty$

و بما ان $\lim_{n\to+\infty}3^n=+\infty$ فإنه حسب قاعدة نهاية جداء متتاليتين نستنتج:

$\lim_{n\to+\infty}V_n=\lim_{n\to+\infty}3^n\times(9-(\frac{5}{3})^n)=-\infty$ و عليه (V_n) متباعدة.

3 - تقارب المتتاليات الرتيبة

3 - 1 متتالية محدودة (من الأعلى - من الأسفل)

- القول أن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى يعني أنه يوجد عدد حقيقي M بحيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n\le M$.

يسمى M عنصرا حادا من الأعلى للمتتالية (U_n)

- القول أن المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل يعني أنه يوجد عدد حقيقي m بحيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n\ge m$.

يسمى m عنصرا حادا من الأسفل.

- إذا كانت (U_n) محدودة من الأعلى و من الأسفل نقول أنها محدودة.

ملاحظة

1) إذا كانت متتالية (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد M فإن كل الأعداد الحقيقية الأكبر من M هي ايضا عناصر حادة لـ (U_n) .
نعرف بنفس الكيفية العناصر الحادة من الأسفل.

2) نفي القضية " المتتالية (U_n) غير محدودة من الأعلى " يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي A كبير بالقدر الكافي نستطيع ان نجد حد U_{n_0} بحيث $U_{n_0}\rangle A$.

مثال -

1) المتتالية (U_n) المعرفة بـ $U_n=\sin n$ محدودة لأنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $-1\le\sin n\le 1$

2) المتتالية $V_n=(-1)^n\cos n$ محدودة لأنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $-1\le V_n\le 1$

3) المتتالية $W_n=-n^2$ محدودة من الأعلى لأنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $W_n\le 0$

3 - 2 تقارب المتتالية الرتيبة

- المتتالية (U_n) متزايدة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n\le U_{n+1}$

- المتتالية (U_n) متناقصة إذا و فقط إذا كان من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n \geq U_{n+1}$
- المتتالية (U_n) رتيبة إذا و فقط إذا كانت متزايدة او إذا كانت متناقصة.

مثال -

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = -n^2 + n + 1$
من اجل كل عدد طبيعي $U_{n+1} = -n^2 - n + 1$
إذن من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1} - U_n = -2n$
من اجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون $-2n \leq 0$ اي $U_{n+1} - U_n \leq 0$ و بالتالي (U_n) متناقصة.

مبرهنة 1

1) كل متتالية متزايدة و غير محدودة من الأعلى نهايتها $(+\infty)$
2) كل متتالية متناقصة و غير محدودة من الأسفل نهايتها $(-\infty)$

الإثبات

نثبت القسم الأول من المبرهنة (1).
لتكن (U_n) متتالية متزايدة و غير محدودة من الأعلى،
- (U_n) غير محدودة من الأعلى هذا يعني انه مهما يكن العدد الحقيقي A كبير بالقدر الكافي، نستطيع أن نجد حد U_p من المتتالية (U_n) بحيث $U_p > A$ .... (1)
- (U_n) متزايدة يعني انه من اجل كل عدد طبيعي n بحيث $n > p$ يكون $U_n \geq U_p$ ..... (2)
من (1) و (2) نستنتج انه من اجل كل $n > p$ يكون $U_n > A$
و هذا يعني انه ابتداء من الرتبة P كل حدود المتتالية (U_n) تنتمي إلى مجال $]A, +\infty[$
مما يعني ان نهاية (U_n) هي $+\infty$

مبرهنة 2

1) كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة
2) كل متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.

الإثبات

1) بما ان المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى فإنه يوجد عدد حقيقي M بحيث من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n \leq M$، عندئذ يوجد عدد حقيقي A و هو أصغر العناصر الحادة لـ U_n.
و عليه فكل مجال من الشكل $]A-\alpha, A+\alpha[$ حيث $\alpha > 0$ يشمل على الأقل حد U_p من المتتالية (U_n).

لأنه إذا كان هذا المجال لا يشمل أي حد U_p فإن كل الحدود U_n تقع على يسار $A-\alpha$ وهذا يعني أن $A-\alpha$ عنصر حاد لـ (U_n) مما يخالف الفرض كون A هو اصغر العناصر الحادة الكبرى لـ (U_n).

و بما أن المتتالية (U_n) متزايدة و كل الحدود (U_n) أصغر من A
فإن المجال $]A-\alpha, A+\alpha[$ يشمل حدود المتتالية (U_n) ابتداء من الرتبة p و هذا صحيح من اجل كل α (اي من اجل كل مجال مركزه A).
إذن المتتالية (U_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي A.
2) نبين بنفس الطريقة ان كل متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل متقاربة.

ملاحظة

هذه المبرهنة تسمح لنا بمعرفة تقارب متتالية و لكن لا تعطينا قيمة نهايتها.

تمرين تدريبي 1

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$ و $U_0 = 1$
1) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $0 < U_n \leq 2$
2) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة ثم استنتج تقاربها واحسب نهايتها.

✓ الحل

1) نسمي p_n الخاصية "$0 < U_n \leq 2$"
- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 1$ و $0 < 1 \leq 2$
- نفرض أن p_n صحيحة من اجل عدد طبيعي $n \geq 0$ اي $0 < U_n \leq 2$
و نبرهن ان p_{n+1} صحيحة اي $0 < U_{n+1} \leq 2$
من الفرض لدينا $0 < U_n \leq 2$ و بإضافة 2 إلى حدود هذه الأخيرة نجد $2 < U_n + 2 \leq 4$
و بالمرور إلى الجذر نجد $\sqrt{2} < \sqrt{U_n + 2} \leq 2$ اي $0 < \sqrt{2} < U_{n+1} \leq 2$
و منه p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.
من المتباينة $0 < U_n \leq 2$ نستنتج أن (U_n) محدودة من الأعلى.

2) (U_n) متزايدة هذا يعني انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1} - U_n \geq 0$.

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2+U_n} - U_n = \frac{(\sqrt{2+U_n} - U_n)(\sqrt{2+U_n} + U_n)}{\sqrt{2+U_n} + U_n}$$

$$= \frac{2 + U_n - U_n^2}{\sqrt{2+U_n} + U_n} = \frac{-(U_n+1)(U_n-2)}{\sqrt{2+U_n} + U_n}$$

بما أن $0 < U_n \leq 2$ فإن $U_n + 1 > 0$ و $U_n - 2 \leq 0$ و بالتالي:

$\frac{-(U_n+1)(U_n-2)}{\sqrt{2+U_n} + U_n} \geq 0$ أي $U_{n+1} - U_n \geq 0$ مما يدل على أن (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

- بما ان (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ.
ℓ جذر للمعادلة $x = f(x)$ حيث $f(x) = \sqrt{2+x}$

$x = f(x)$ يكافئ $x^2 - x - 2 = 0$

يكافئ $x = 2$ او $x = -1$

وبما ان حدود المتتالية موجبة فإن نهايتها موجبة و بالتالي $\lim_{n \to +\infty} U_n = 2$

تمرين تدريبي 2

(U_n) متتالية معرفة على IN بـ $u_0 = 2$ و بالعلاقة $U_{n+1} = \frac{U_n}{3+2U_n}$

1) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n \rangle 0$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة $f : x \to \frac{x}{3+2x}$ على $]0, +\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير (U_n)

3) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم استنتج نهايتها.

✓ الحل

1) نسمي p_n الخاصية "$U_n \rangle 0$"

- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 2$ و $2 \rangle 0$

- نفرض ان p_n صحيحة اي $U_n \rangle 0$

و نبرهن ان p_{n+1} صحيحة اي $U_{n+1} \rangle 0$

لدينا $U_n \rangle 0$ فرضا

و بضرب طرفي المتباينة في 2 نجد $2U_n \rangle 0$ و بإضافة 3 نجد $3+2U_n \rangle 3 \rangle 0$

إذن $U_{n+1} \rangle 0$ منه p_{n+1} صحيحة

و بالتالي p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ لأن $[0, +\infty[\subset D_f$

و من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = \frac{3}{(2+3x)^2}$ إذن $f'(x) \rangle 0$

وبالتالي f دالة متزايدة تماما على $]0, +\infty[$.

إذا كان $U_{n+1} = f(U_n)$ و f متزايدة فإن المتتالية (U_n) رتيبة لكن $U_1 = \frac{2}{7}$ و

$U_1 - U_0 \leq 0$

إذن يمكن ان نخمن ان (U_n) متناقصة.

نبرهن بالتراجع ان (U_n) متناقصة.

نسمي p_n الخاصية "$U_{n+1} \leq U_n$"

- من اجل $n = 0$: p_0 صحيحة لأن $U_1 - U_0 \leq 0$

- نفرض ان p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n اي $U_{n+1} \leq U_n$

و نبرهن ان p_{n+1} صحيحة اي $U_{n+2} \leq U_{n+1}$

من الفرض لدينا $U_{n+1} \leq U_n$

و بما ان f متزايدة تماما على $]0, +\infty[$ فإن $f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$

اي $U_{n+2} \leq U_{n+1}$ و منه p_{n+1} صحيحة.

إذن من اجل كل عدد طبيعي n تكون p_n صحيحة.

3) بما ان (U_n) محدودة من الأسفل و متناقصة فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ.

حيث ℓ جذر للمعادلة $x = f(x)$

$x = f(x)$ تكافئ $x = \frac{x}{3+2x}$

... : يكافئ $(x=0)$ أو $(x=-1)$

بما ان $x \geq 0$ فإن $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

4- متتاليات من الشكل $U_{n+1} = f(U_n)$

4 - 1 التمثيل البياني للمتتالية (U_n)

(U_n) متتالية حدها الأول U_0 و $U_{n+1} = f(U_n)$

حيث f دالة و (C_f) تمثيلها البياني في

معلم متعامد و متجانس.

نعلم العدد الحقيقي U_0 على محور الفواصل

ثم نعلم النقطة A_0 من (C_f) ذات الفاصلة U_0.

و الترتيبة $U_1 = f(U_0)$

نعلم U_1 على محور الفواصل حيث U_1

هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم $(D) : y = x$ مع المستقيم ذي المعادلة $y = U_1$.

النقطة A_1 ذات الفاصلة U_1 و الترتيبة $U_2 = f(U_1)$ الناتجة من تقاطع $x = U_1$ مع (C_f)

نعلم العدد U_2 على محور الفواصل كما في الحالة السابقة و هكذا دواليك.

مثال -

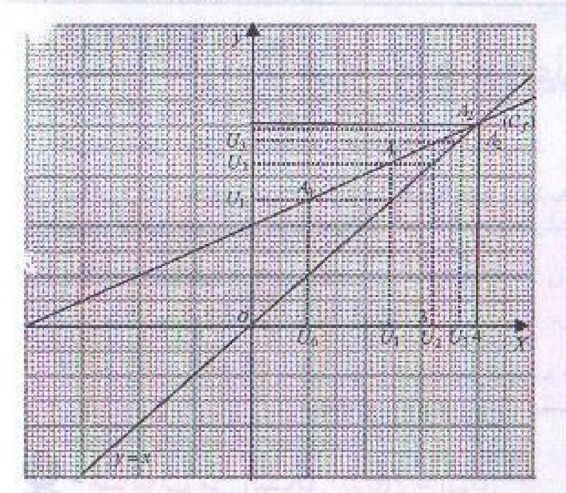
مثل بيانيا الحدود U_0, U_1, U_2, U_3, U_n ثم أعط تخمينا حول اتجاه تغير و نهاية

المتتالية (U_n) المعرفة بـ $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2$ و $U_0 = 1$

✓ الحل

نرسم في معلم متعامد و متجانس المستقيمين (d) و (Δ) ذوي المعادلة $y = \frac{1}{2}x + 2$ و $y = x$

على الترتيب.



- نعلم العدد الحقيقي U_0 على محور الفواصل ثم نعلم النقطة A_0 من (d) ذات الفاصلة U_0 و ترتيبتها $U_1 = f(U_0)$ الناتجة من تقاطع (d) مع المستقيم ذي المعادلة $x = U_0$.

- نعلم U_1 على محور الفواصل حيث U_1 هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم $y = U_1$ مع (Δ)

- نعلم النقطة A_1 الناتجة من تقاطع المستقيم ذي المعادلة $x = U_1$ و (d).

ترتيبية النقطة A_1 هي $U_2 = f(U_1)$.

- نعلم U_2 على محور الفواصل حيث U_2 هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم ذي المعادلة $y = U_2$ مع المستقيم (Δ) و هكذا نعلم حدود المتتالية (U_n).

نلاحظ من الشكل أن الحدود U_0 , U_1 , U_2 ,...... تقترب من فاصلة نقطة تقاطع (d) مع (Δ)

و نلاحظ أيضا أن المتتالية (U_n) متزايدة.

أي أن $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 4$ (لأن فاصلة نقطة التقاطع هي 4)

4 - 2 دراسة المتتالية (U_n) المعرفة ب $U_{n+1} = a\,U_n + b$

نلاحظ أن (U_n) معرفة بالشكل $U_{n+1} = f(U_n)$ حيث $f(x) = ax + b$

- حالة $a = 1$ ،

$U_{n+1} = U_n + b$

- إذا كان $b = 0$ فإن (U_n) ثابتة
- إذا كان $b \neq 0$ فإن (U_n) متتالية حسابية أساسها b فهي متباعدة.

- حالة $a \neq 1$ و $a \neq -1$

- لحساب الحد العام للمتتالية (U_n) المعرفة بالعلاقة $U_{n+1} = a\,U_n + b$ نعرف متتالية (V_n) حيث $V_n = U_n - \alpha$ و نختار α حتى تكون (V_n) هندسية.

و دراسة تقارب المتتالية (U_n) تؤول إلى دراسة تقارب (V_n).

بما أن $a \neq 1$ فإن المستقيمين $(D): y = x$ و $(d): y = a\,x + b$ يتقاطعان في نقطة فاصلتها α.

- في حالة $a = -1$ يكون $U_{n+1} = -U_n + b$

$U_1 = -U_0 + b$ ، $U_2 = -U_1 + b = U_0$ ، $U_3 = -U_2 + b = U_1$

$U_4 = -U_3 + b = U_0$

نلاحظ أنه إذا كان n زوجي فإن $U_n = U_0$ و إذا كان n فردي $U_n = -U_0 + b$

- إذا كان $b = 0$ و $U_0 = 0$ فإن المتتالية (U_n) معدومة
- إذا كان $U_0 \neq 0$ فإن $U_n = U_0$ لما n زوجي و $U_n = -U_0 + b$ إذا كان n فردي

و بالتالي المتتالية (U_n) ليست لها نهاية. إذن فهي متباعدة.

♦ - مثال

لتكن (U_n) متتالية معرفة ب $U_0 = 3$ و $U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 3$

و (V_n) متتالية معرفة ب $V_n = U_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

1) عين نقطة تقاطع المستقيمين $y = x$ و $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ولتكن α فاصلتها.

2) أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب) أوجد نهاية (V_n) ثم استنتج نهاية (U_n).

✓ الحل

1) لتكن $M(x, y)$ نقطة تقاطع المستقيم (D) ؛ $y = x$ مع المستقيم (d) ؛ $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

فاصلة النقطة M تحقق $-\frac{1}{2}x + 3 = x$ تكافئ $x = 2$

إذن $\alpha = 2$ و هي القيمة المطلوبة.

2) أ) (V_n) متتالية هندسية أساسها q يكافئ $V_{n+1} = q\,V_n$

$$V_{n+1} = (-\frac{1}{2}U_n + 3) - 2 = -\frac{1}{2}(V_n + 2) + 3 - 2 = -\frac{1}{2}V_n - 1 + 3 - 2 = -\frac{1}{2}V_n$$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = a = -\frac{1}{2}$

ب) بما أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0 = 1$

فإن $V_n = (-\frac{1}{2})^n$

و بما أن $1 \rangle -\frac{1}{2} \rangle -1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

من المساواة $V_n = U_n - 2$ نجد $U_n = V_n + 2$

و بما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2$

إذن (U_n) متقاربة نحو 2 .

5 - المتتاليات المتجاورة

5 - 1 دراسة التقارب

مثال -

في الجدول الآتي تظهر في العمودين B و C ستة حدود لمتتاليتين (U_n) و (V_n) على التوالي. في العمود A يوجد دليل كل حد

نلاحظ أن $U_0=1$ و $V_0=12$.

حجزنا

- في الخلية B_2 = (B1+2*C1)/3
- في الخلية C_2 = (B1+3*C1)/4
- في الخلية D_2 C_2-B_2 .

	A	B	C	D
1	0	1	12	11
2	1	8.333	9.250	0.91
3	2	8.9444	9.020825	0.07638
4	3	8.995364	9.001728	0.0006365
5	4	8.9995981	9.00013775	0.00053916
6	5	8.9999578	9.000002838	0.00004503

1) أعط عبارة U_{n+1} و V_{n+1} بدلالة U_n و V_n

2) أعط تخمينا حول اتجاه تغير (U_n) و (V_n).

ما هو التخمين حول نهاية (V_n-U_n) ؟

3) - لتكن (W_n) متتالية حيث $W_n=3U_n+8V_n$ بين أن (W_n) ثابتة .

- إذا فرضنا أن (U_n) و (V_n) تقتربان من نفس النهاية ℓ احسب القيمة الدقيقة لهذه النهاية باستعمال (W_n).

✓ الحل

1) من المعطيات $U_2=\dfrac{U_1+2V_1}{3}$ و $V_2=\dfrac{U_1+3V_1}{4}$

و عليه عبارة U_{n+1} و V_{n+1} تظهر بـ $U_{n+1}=\dfrac{U_n+2V_n}{3}$ و $V_{n+1}=\dfrac{U_n+3V_n}{4}$

2) نلاحظ من الجدول أن المتتالية (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة. و نلاحظ أيضا أنه كلما كبر n فإن V_n-U_n تؤول إلى الصفر و منه يمكن أن نكتب $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n-U_n)=0$

3) إثبات أن (W_n) ثابتة

$$W_{n+1}-W_n=(3U_{n+1}+8V_{n+1})-(3U_n+8V_n)$$
$$=3\left(\frac{U_n+2V_n}{3}\right)+8\left(\frac{U_n+3V_n}{4}\right)-3U_n-8V_n=0$$

و منه المتتالية (W_n) ثابتة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $W_n=W_0=3U_0+8V_0=99$

- بما أن (U_n) و (V_n) متقاربتان نحو نفس نهاية ℓ فإن :

$$\lim_{n\to+\infty}W_n=3\lim_{n\to+\infty}U_n+8\lim_{n\to+\infty}V_n=3\ell+8\ell=11\ell$$

لكن $\lim\limits_{n\to+\infty}W_n=99$ إذن $11\ell=99$ ومنه $\ell=9$

5 - 2 تعريف

القول أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان يعني أن إحداهما متناقصة و الأخرى متزايدة. و $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-V_n)=0$

V_n U_n

مثال -

$U_n=2-\dfrac{1}{n+1}$ و $V_n=2+\dfrac{1}{n+1}$

المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان لأن (U_n) متناقصة و (V_n) متزايدة

و $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-V_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2}{n+1}=0$

مبرهنة

إذا كانت المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتين فإن كلتيهما متقاربتان و لهما نفس النهاية.

الإثبات

لتكن المتتاليتان (U_n) و (V_n) حيث (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n-U_n)=0$

- نبرهن أولا أن $V_n\geq U_n$
- لتكن المتتالية (W_n) المعرفة بـ $W_n=V_n-U_n$
- ندرس اتجاه تغير (W_n)

$$W_{n+1}-W_n=(V_{n+1}-U_{n+1})-(V_n-U_n)=(V_{n+1}-V_n)-(U_{n+1}-U_n)$$

بما أن (U_n) متزايدة فإن $U_{n+1}-U_n\geq 0$

وبما أن (V_n) متناقصة فإن $V_{n+1}-V_n\leq 0$

ومنه نستنتج أن المتتالية (W_n) متناقصة و تقترب من الصفر.

لنبرهن بالخلف أن كل حدودها موجبة.

نفرض أن أحد حدودها W_p سالب تماما و لتكن قيمته $-a$ حيث $a>0$.

المتتالية (W_n) متناقصة إذن كل حدودها ابتداء من W_p تكون أصغر من $-a$
وبالتالي المجال $]-a , a[$ لا يشمل كل حدود (W_n) ابتداء من رتبة معينة و عليه المتتالية (W_n) لا تؤول إلى الصفر وهذا يناقض الفرضية.
إذن كل حدود (W_n) موجبة.
ومنه نستنتج أن $V_n - U_n \geq 0$ أي $V_n \geq U_n$ من أجل كل n .

- نبين أن (U_n) و (V_n) متقاربتان

نعلم أن $V_n \geq U_n$ ولكن (V_n) متناقصة و كل حدودها أصغر من V_0 وعليه من أجل كل n
$V_0 \rangle V_n \geq U_n$ مما يفسر أن (U_n) محدودة من الأعلى.
المتتالية (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى إذن فهي متقاربة و لتكن ℓ نهايتها.
وبنفس الطريقة نبين أن (V_n) محدودة من الأسفل بـ U_0 و متناقصة
فهي إذن متقاربة نحو ℓ'.

- نبين أن $\ell = \ell'$:

نعلم أن (U_n) و (V_n) تقتربان على التوالي إلى ℓ و ℓ' و حسب القواعد العملية للنهايات نجد

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = \lim_{n\to+\infty} U_n - \lim_{n\to+\infty} V_n = \ell - \ell'$$

و بما أن $\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$ فإن $\ell - \ell' = 0$ أي $\ell = \ell'$

خاصية

كل عدد حقيقي يمكننا حصره بواسطة حدود متتابعة لمتتاليتين (a_n) و (b_n)
بحيث المتتالية (a_n) متزايدة و المتتالية (b_n) متناقصة و $b_n - a_n = 10^{-n}$
هذا العدد الحقيقي هو النهاية المشتركة للمتتاليتين التقاربتين للأعداد العشرية.

الإثبات

ليكن x عدد حقيقي بحيث من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $b_n \rangle x \rangle a_n$
و $b_n - a_n = 10^{-n}$
إذا كانت (a_n) متزايدة و (b_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$
فإن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتان و بالتالي تقتربان إلى نفس النهاية ℓ
و بتطبيق نظرية الحصر نجد أن المتتاليتين تقتربان نحو x .

مثال -

تعطي الآلة الحاسبة $\sqrt{2} = 1{,}41421356$ و منه يمكننا كتابة الحصر التالي:

- $2 \rangle \sqrt{2} \rangle 1$ إذن $b_0 \rangle \sqrt{2} \rangle a_0$ مع $a_0 = 1$ و $b_0 = 2$ و $b_0 - a_0 = 10^{-0} = 1$
- $1{,}5 \rangle \sqrt{2} \rangle 1{,}4$ إذن $a_1 = 1{,}4$ و $b_1 = 1{,}5$ و $b_1 - a_1 = 0{,}1 = 10^{-1}$
- $1{,}42 \rangle \sqrt{2} \rangle 1{,}41$ إذن $a_2 = 1{,}41$ و $b_2 = 1{,}42$ و $b_2 - a_2 = 0{,}01 = 10^{-2}$
- $1{,}415 \rangle \sqrt{2} \rangle 1{,}414$ إذن $a_2 = 1{,}414$ و $b_2 = 1{,}415$ و $b_2 - a_2 = 10^{-3}$

المتتالية 1 : 1 ، 1,4 ، 1,41 ، 1,414 ... متزايدة.
المتتالية 2 : 2 ، 1,5 ، 1,42 ، 1,415 ... متناقصة.
هاتان المتتاليتان لهما نهاية مشتركة $\sqrt{2}$.

تمرين تدريبي 1

لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان كما يلي:

$$U_0 = 2 \ , \ V_0 = 3 \ , \ U_{n+1} = \frac{3U_n + 2V_n}{5} \ , \ V_{n+1} = \frac{2U_n + 3V_n}{5}$$

1) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $V_n - U_n \rangle 0$
2) بين أن المتتالية (W_n) المعرفة بـ $W_n = V_n - U_n$ هي متتالية هندسية.
3) بين أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متقاربتان.
4) أحسب $U_{n+1} + V_{n+1}$ بدلالة $U_n + V_n$ ثم ماذا يمكن القول عن المتتالية (X_n) المعرفة بـ $X_n = U_n + V_n$ ثم استنتج النهاية المشتركة لـ (U_n) و (V_n).

الحل

1) نسمي p_n الخاصية " $V_n - U_n \rangle 0$ "
- p_0 صحيحة لأن $V_0 - U_0 = 3 - 2 = 1$ و $1 \rangle 0$
- نفرض أن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ أي $V_n - U_n \rangle 0$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $V_{n+1} - U_{n+1} \rangle 0$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(2U_n + 3V_n) - (3U_n + 2V_n)}{5} = \frac{1}{5}(V_n - U_n)$$

إذن $V_{n+1} - U_{n+1} \rangle 0$ ومنه p_{n+1} صحيحة وبالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

2) (W_n) متتالية هندسية أساسها q يكافئ $W_{n+1} = qW_n$

$W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{1}{5}(V_n - U_n) = \frac{1}{5}W_n$ إذن (W_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$

3) $$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n + 2V_n}{5} - U_n = \frac{2V_n - 2U_n}{5} = \frac{2}{5}W_n$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2U_n + 3V_n}{5} - V_n = \frac{2U_n - 2V_n}{5} = -\frac{2}{5}W_n$$

بما أن $W_n = 1 \times (\frac{1}{5})^n \rangle 0$ فإن $U_{n+1} - U_n \rangle 0$ و $V_{n+1} - V_n \langle 0$
مما يدل على أن (U_n) متزايدة و أن (V_n) متناقصة.

$\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ و بما أن $W_n = V_n - U_n$ فإن $\lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$

إذن (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان و بالتالي فهما متقاربتان.

4) $U_{n+1}+V_{n+1} = \dfrac{5U_n+5V_n}{5} = U_n+V_n$

إذن المتتالية (X_n) ثابتة و عليه فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = U_0+V_0 = 5$

و من جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n + \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell+\ell = 2\ell$

إذن $2\ell = 5$ منه $\ell = \dfrac{5}{2}$

6 - حصر مقادير باستعمال المتتاليات المتجاورة

لتحديد مقدار مجهول S (مساحة ، طول ، حجم ، عدد ...) يتحتم علينا إيجاد حصر أكثر فأكثر دقة لـ S بمقادير معلومة.

في المرحلة الأولى نحصل على $V_0 < S < U_0$

و في المرحلة الثانية $V_0 < V_1 < S < U_1 < U_0$

و في المرحلة n نحصل على $V_0 < V_1 < ... < V_n < S < U_n < ... < U_1 < U_0$

نعيد هذه العملية بعدد غير منته من المرات، فنحصل على متتالية (V_n) متزايدة و المتتالية (U_n) متناقصة . و متتالية الفرق $V_n - U_n$ تقترب نحو الصفر.

المجالات $[V_0, U_0]$ ، $[V_1, U_1]$ ، ...... ، $[V_n, U_n]$ ، .... أطوالها تقترب من الصفر،

مما يجعل المجال $[V_n, U_n]$ حصرا دقيقا لـ S .

تمرين تدريبي 1

نريد حساب قيمة مقربة للمساحة A للحيز D المحدد بالمنحني (C_f) الممثل للدالة $x \xrightarrow{f} \frac{1}{x}$ و المستقيمات التي معادلاتها هي $x=1$ و $x=2$ و $y=0$.

D هو مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول 1سم) بحيث $2 \ge x \ge 1$ و $f(x) \ge y \ge 0$.

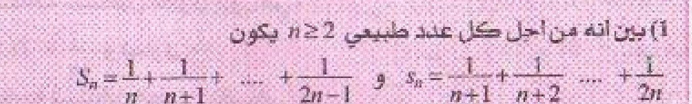
على محور الفواصل نعلم النقطتين A و B فاصلتيهما على التوالي 1 و 2

و ليكن n عدد طبيعي معطى حيث $n \ge 2$.

نقسم القطعة $[AB]$ إلى n قطع متقايسة و على كل قطعة نرسم مستطيلين أحد رأسيهما العلويين ينتمي إلى (C_f) .

و هكذا نحصل على n مستطيل سفلي يقع تحت C_f و n مستطيل علوي كما هو موضح في الشكل ، نرمز بـ s_n إلى المساحة الكلية للمستطيلات السفلية و S_n إلى المساحة الكلية للمستطيلات العلوية نحصل هكذا على متتاليتين عدديتين s_n و S_n اللتان تحصران المساحة A . أي $s_n < A < S_n$

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 2$ يكون

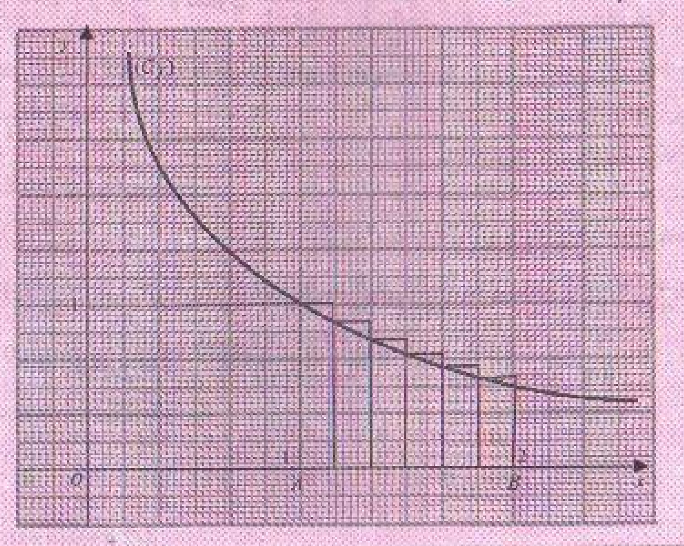


$S_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + ... + \dfrac{1}{2n-1}$ و $s_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} .... + \dfrac{1}{2n}$

2) بين أن (s_n) متزايدة و (S_n) متناقصة.

3) بين أن $\lim (S_n - s_n) = 0$ ماذا تستنتج ؟

4) عين أصغر عدد طبيعي p حيث s_p قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2} و عدد q بحيث S_q قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2}.



✓ الحل

1) - مساحة المستطيل السفلي الأول هي ،

$\dfrac{1}{n} f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ و تساوي $\dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{\frac{n+1}{n}} = \dfrac{1}{n+1}$.

مساحة المستطيل السفلي الثاني هي ،

$\dfrac{1}{n} \times f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$ و تساوي $\dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{\frac{n+2}{n}} = \dfrac{1}{n+2}$

و هكذا حتى نصل إلى المستطيل السفلي الأخير الذي مساحته $\dfrac{1}{n} \times f(2)$ و تساوي $\dfrac{1}{2n}$

إذن المساحة الكلية للمستطيلات السفلية هي $s_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$

- مساحة المستطيل العلوي الأول هي :

$\frac{1}{n}\times f(1)$ و تساوي $\frac{1}{n}$

مساحة المستطيل العلوي الثاني هي :

$\frac{1}{n}\times f\left(1+\frac{1}{n}\right)$ و تساوي $\frac{1}{n}\times\frac{1}{\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{n+1}$

مساحة المستطيل العلوي الأخير هي :

$\frac{1}{n}\times f\left(2-\frac{1}{n}\right)$ و تساوي $\frac{1}{n}\times\frac{1}{\frac{2n-1}{n}}=\frac{1}{2n-1}$

إذن المساحة الكلية للمستطيلات العلوية هي :

$$S_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+.....+\frac{1}{2n-1}$$

2) - إثبات أن (s_n) متناقصة.

$$s_{n+1}-s_n=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n+1}\right)-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+....+\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+....+\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}=\frac{2n+1+2n-2(2n+1)}{2n(2n+1)}=\frac{-1}{2n(2n+1)}<0$$

- إثبات أن (S_n) متزايدة.

$$S_{n+1}-S_n=\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+....+\frac{1}{2n+2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}$$

$S_n>0$ ومنه فإن (S_n) متزايدة.

3) بما أن $S_n-s_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty}(S_n-s_n)=0$

بما أن (s_n) متزايدة و (S_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty}(S_n-s_n)=0$ فإن (S_n) و (s_n) متتاليتان متجاورتان و بالتالي لهما نفس النهاية ℓ و حسب نظرية الحصر فإن $A=\ell$

4) تعيين p بحيث s_p قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2}.

s_p قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2} هذا معناه أن (1)..... $|s_p-A|<10^{-2}$

و بما أن (s_n) متزايدة تماما فإن $|s_{p+1}-A|<10^{-2}$

و لدينا $|s_{p+1}-s_p|=|(s_{p+1}-A)-(s_p-A)|$

لكن $|(s_{p+1}-A)-(s_p-A)|\le|s_{p+1}-A|+|s_p-A|$

أي $|s_{p+1}-s_p|\le|(s_{p+1}-A)|+|s_p-A|<10^{-2}+10^{-2}$

ومنه نجد $|s_{p+1}-s_p|<2\times10^{-2}$

$|s_{p+1}-s_p|<2\times10^{-2}$ يكافئ $\frac{1}{2(p+1)(2p+1)}<\frac{2}{10}$ يكافئ $p\in]2.79,+\infty[$

و بما أن p عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 فإن أصغر قيمة ممكنة لـ p هي 3 .

و في هذه الحالة تكون القيمة المقربة بالنقصان لـ A إلى 10^{-2} هي $s_3\approx0.61$

- تعيين q بحيث S_q قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2}

بنفس الطريقة نجد $|S_{q+1}-S_q|<2\times10^{-2}$

و منه نجد $\frac{1}{2q(2q+1)}<\frac{2}{10}$ و بالتبسيط نجد $2q^2+q-25>0$

و عليه $p\in]3,29;+\infty[$

إذن أصغر قيمة لـ q هي $q=4$

إذن S_4 هي قيمة مقربة بالزيادة لـ A إلى 10^{-2}

$S_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\approx0.75$ إذن $0,61<A<0,75$

العدد A هو عدد شهير، و هو اللوغاريتم النيبيري لـ 2 .

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 نهاية المتتاليات

1) المتتالية (U_n) معرفة من أجل كل $n \geq 2$ بـ $U_n=\frac{2n+1}{n-1}$ نهايتها 2.
أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن U_n تنتمي إلى المجال $]1,98 ; 2,02[$

2) المتتالية (V_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ $V_n=n^2\sqrt{n}$ نهايتها $(+\infty)$. أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن V_n تنتمي إلى المجال $]10^5 , +\infty[$

✓ الحل

1) الحدود U_n تنتمي إلى المجال $]1,98 ; 2,02[$ يعني أن $2,02 > \frac{2n+1}{n-1} > 1,98$

و بطرح (2) من حدود هذه الأخيرة نجد $0,02 > \frac{3}{n-1} > -0,02$

وبالضرب في $10^2(n-1)$ نجد $2(n-1) > 3 > -2(n-1)$ ..... (I)

المتباينة $3 > -2(n-1)$ دوما محققة ومنه المتباينة (I) تكافئ $2(n-1) > 3$

$2(n-1) > 3$ تكافئ $2n > 5$ تكافئ $n > \frac{5}{2}$ ومنه قيمة n_0 المطلوبة هي 3 .

2) الحدود V_n تنتمي إلى $]10^5 , +\infty[$ هذا يعني $n^2\sqrt{n} > 10^5$ أي $n^{\frac{5}{2}} > 10^5$

$n^{\frac{5}{2}} > 10^5$ يكافئ $(\sqrt{n})^5 > 10^5$ يكافئ $\sqrt{n} > 10$ يكافئ $n > 100$

ومنه قيمة n المطلوبة هي 101 .

تطبيق 2 حصر متتالية - نهاية متتالية باستعمال نظرية الحصر

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ $U_n=(\frac{n}{10}-1)^n$

1) احسب U_1 , U_2 , U_3 , U_4

2) بين أنه إذا كان $n > 25$ فإن $U_n > (\frac{3}{2})^n$ ثم استنتج نهاية (U_n).

✓ الحل

1) $u_1 = (\frac{1}{10}-1)^1 = \frac{-9}{10}$, $u_2 = (\frac{2}{10}-1)^2 = \frac{64}{100}$

$u_3 = (\frac{3}{10}-1)^3 = \frac{-343}{100}$, $u_4 = \frac{81}{625}$

2) إذا كان $n > 25$ فإن $\frac{n}{10}-1 > \frac{3}{2}$ و منه $(\frac{n}{10}-1)^n > (\frac{3}{2})^n$

$\lim_{n\to+\infty} (\frac{3}{2})^n = +\infty$ لأن $(\frac{3}{2})^n$ حد عام لمتتالية هندسية أساسها $\frac{3}{2}$ و $\frac{3}{2} > 1$

وحسب نظرية الحصر فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

تطبيق 3 نهاية متتالية

ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية المتتالية (U_n) محددا القاعدة المستعملة

أ) $U_n=\frac{5n+2}{3n-2}$ ، ب) $U_n=3n-\frac{1}{3n+2}$ ، جـ) $U_n=\frac{3n^2+5n+1}{n^2+n+1}$

د) $U_n=\sqrt{\frac{3n-1}{n+1}}$ ، هـ) $U_n=\cos(\frac{n\pi+1}{2n+1})$

و) $U_n=\frac{n}{\sqrt{n+1}}-\frac{n}{\sqrt{n+2}}$ ، ي) $U_n=\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+1}$

✓ الحل

أ) $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n}{3n} = \frac{5}{3}$ (نهاية دالة ناطقة).

ب) $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ لأن $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{3n+2} = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} 3n = +\infty$ (قاعدة مجموع متتاليتين)

جـ) $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{n^2} = 3$ (نهاية دالة ناطقة).

د) $U_n = f(V_n)$ حيث $V_n=\frac{3n-1}{n+1}$ و $f(x)=\sqrt{x}$

بما أن $\lim_{n\to+\infty} V_n = 3$ و f مستمرة عند 3

فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = f(3) = \sqrt{3}$ (نهاية متتالية (U_n) من الشكل $(U_n = f(V_n))$)

هـ) $U_n = f(V_n)$ حيث $V_n = \frac{n\pi+1}{2n+1}$ و $f(x) = \cos x$

بما ان $\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{\pi}{2}$ و الدالة f مستمرة عند $\frac{\pi}{2}$ فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

و) $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} n(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}) = \lim_{n\to+\infty} n\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3n+2}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\frac{1}{(\sqrt{n^2+3n+2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\,(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} = 0$$

ي) $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}})}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{0}{1} = 0$

تطبيق 4 حساب نهاية متتالية بالاعتماد على متتالية حسابية

(U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان من اجل كل عدد طبيعي n بـ $U_0 = 2$

و $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$ و $V_n = \frac{3}{U_n}$

1) تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > 0$

2) أ) بين ان المتتالية (V_n) حسابية ، ب) احسب V_n ثم U_n بدلالة n

3) استنتج نهاية المتتالية (U_n).

الحل

1) نسمي p_n الخاصية " $U_n > 0$ "

- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 2$ و $2 > 0$
- نفرض أن p_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n اي $U_n > 0$

و نبرهن ان p_{n+1} صحيحة اي $U_{n+1} > 0$.

بما اننا فرضنا $U_n > 0$ فإن $1+U_n > 0$ ومنه $\frac{U_n}{1+U_n} > 0$

إذن $U_{n+1} > 0$ بالتالي p_{n+1} صحيحة و عليه p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n.

2) أ) (V_n) حسابية أساسها q يعني $V_{n+1} = V_n + q$

$$V_{n+1} = \frac{3}{U_{n+1}} = \frac{3}{\frac{U_n}{1+U_n}} = 3\frac{(1+U_n)}{U_n} = \frac{3}{U_n}+3 = V_n+3$$

إذن (V_n) حسابية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $V_0 = \frac{3}{U_0} = \frac{3}{2}$

ب) بما أن (V_n) حسابية حدها الأول V_0 أساسها q

فإن عبارة الحد العام هي $V_n = V_0 + qn$ إذن $V_n = \frac{3}{2} + 3n$

- لدينا $V_n = \frac{3}{U_n}$ و منه $U_n = \frac{3}{V_n}$ بالتعويض نجد $U_n = \frac{3}{\frac{3}{2}+3n}$
- $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\frac{3}{2}+3n} = 0$

تطبيق 5 المتتاليات المحدودة

1) (U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ $U_n = 2 - \frac{3}{n^2}$ بين أن المتتالية (U_n) محدودة.

2) (V_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ $V_n = \frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}$

بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $1 \le V_n \le 3$.

الحل

1) من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا $n^2 \ge 1$

بالقلب نجد $0 < \frac{1}{n^2} \le 1$ بالضرب في -3 نجد $-3 \le \frac{-3}{n^2} < 0$

و بإضافة 2 نجد $-1 \le 2 - \frac{3}{n^2} < 2$ اي $-1 < U_n < 2$

إذن المتتالية (U_n) محدودة لأنها محدودة من الأعلى و من الأسفل.

2) $V_n = \frac{(n^2+n+1)+(2n+2)}{n^2+n+1} = \frac{n^2+n+1}{n^2+n+1} + \frac{2(n+1)}{n^2+n+1} = 1 + 2\times\frac{n+1}{n^2+n+1}$

بما ان $2(\frac{n+1}{n^2+n+1})> 0$ فإن $1+2(\frac{n+1}{n^2+n+1})\geq 1$ اي $V_n \geq 1$

و بما ان $n^2+n+1 \geq n+1$ فإن $\frac{n+1}{n^2+n+1}\leq 1$

وبضرب طرفي هذه المتباينة في 2 نجد $2(\frac{n+1}{n^2+n+1})\leq 2$ بإضافة 1 نجد $V_n\leq 3$

إذن $3\geq V_n \geq 1$

تطبيق 6 حصر متتالية بمتتاليتين

من اجل كل متتالية (U_n) من المتتالية الآتية اوجد متتاليتين (V_n) و (W_n) مختلفتين عن (U_n) بحيث $V_n \leq U_n \leq W_n$.

أ) $U_n=\frac{n+3}{n+2}$ ،

ب) $U_n=\frac{5n^2-4n+7}{n-1}$ مع $n\geq 2$

جـ) $U_n=\sqrt{3+n}$

د) $U_n=\frac{1}{\sqrt{3+n}}$

الحل

أ) من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $n+4\geq n+3\geq n+2$ ..... (1)

$n+3\geq n+2\geq n+1$ بالقلب نجد $\frac{1}{n+1}\geq\frac{1}{n+2}\geq\frac{1}{n+3}$ .... (2)

بضرب حدود (1) و (2) طرفا لطرف نجد $\frac{n+4}{n+1}\geq U_n\geq\frac{n+2}{n+3}$

ومنه $W_n=\frac{n+4}{n+1}$ و $V_n=\frac{n+2}{n+3}$.

ب) من اجل عدد طبيعي $n\geq 2$ يكون $U_n=n-3+\frac{4}{n-1}$

من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$ يكون $n-1\geq 1$ ومنه $0 < \frac{1}{n-1}\leq 1$

بالضرب في 4 نجد $0<\frac{4}{n-1}\leq 4$

وبإضافة $n-3$ نجد $n-3+0\leq n-3+\frac{4}{n-1}\leq n-3+4$

اي $n-3\leq U_n\leq n+1$ إذن $W_n=n+1$ و $V_n=n-3$.

جـ) من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $n+4\geq n+3\geq n+2$ بالجذر نجد :

$\sqrt{n+4}\geq\sqrt{n+3}\geq\sqrt{n+2}$ اي $W_n\geq U_n\geq V_n$.

حيث $V_n=\sqrt{n+2}$ و $W_n=\sqrt{n+4}$

د) $\sqrt{n+4}\geq\sqrt{n+3}\geq\sqrt{n+2}$ بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+4}}\leq\frac{1}{\sqrt{n+3}}\leq\frac{1}{\sqrt{n+2}}$

اي $V_n\leq U_n\leq W_n$ حيث $W_n=\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ و $V_n=\frac{1}{\sqrt{n+4}}$.

تطبيق 7 حساب نهاية متتالية باستعمال الحصر

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

1) تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $0 < U_n\leq\sqrt{2}$

2) أ) بين انه إذا كانت $n > 10^4$ فإن $0 < U_n < 10^{-2}$

ب) بين أنه إذا كانت $n > 10^8$ فإن $0 < U_n < 10^{-4}$

جـ) كيف نختار n بحيث $U_n < 10^{-8}$ ؟ ما هي نهاية (U_n) ؟

الحل

1) من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $n < n+2$ بجذر الطرفين نجد $\sqrt{n} < \sqrt{n+2}$ بالتالي :

$\sqrt{n+2}-\sqrt{n} > 0$ اي $U_n > 0$.

U_n تكتب على الشكل $U_n=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $\sqrt{n+2}\geq\sqrt{2}$ و $\sqrt{n}\geq 0$ و ومنه

$\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\geq\sqrt{2}$ بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ بالضرب في 2 نجد

$\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\leq\sqrt{2}$ اي $U_n\leq\sqrt{2}$ إذن $0 < U_n\leq\sqrt{2}$

2) أ) إذا كان $n > 10^4$ فإن $\sqrt{n+2} > \sqrt{10^4+2} > \sqrt{10^4}\geq 10^2$ و $\sqrt{n} > 10^2$

وبالتالي يكون $\sqrt{n+2}+\sqrt{n} > 2\times10^2$ بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\times10^2}$

وبالضرب في 2 نجد $U_n < 10^{-2}$

ب) إذا كان $n > 10^8$ فإن $\sqrt{n+2} > 10^4$ و $\sqrt{n} > 10^4$ و بالتالي يكون :

$\sqrt{n+2}+\sqrt{n} > 2\times10^4$ و بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\times10^4}$ إذن $U_n < 10^{-4}$

ج) من السؤال (أ) و (ب) نستنتج أنه يمكن اختيار n بحيث $n \rangle 10^{16}$ يحقق $U_n \langle 10^{-8}$.

- نلاحظ أنه كلما كبر n فإن المجال الذي تنتمي إليه الحدود U_n يصغر و يقترب نحو الصفر ومنه $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.

تطبيق 8 دراسة تقارب متتاليات - البرهان بالتراجع

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=\sqrt{1+U_n^2}$.

1) أ) بين بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون $U_n=\sqrt{1+n}$

ب) ادرس تقارب المتتالية (U_n).

2) نضع $V_n=\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و $W_n=\frac{U_n+U_{n+1}}{U_{n+2}}$ ادرس تقارب هاتين المتتاليتين.

الحل

1) أ) نسمي p_n الخاصية "$U_n=\sqrt{n+1}$"

- p_0 صحيحة لأن $U_0=1=\sqrt{1+0}$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أي $U_n=\sqrt{1+n}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1}=\sqrt{2+n}$.

$$U_{n+1}=\sqrt{1+U_n^2}=\sqrt{1+(\sqrt{1+n})^2}=\sqrt{2+n}$$

منه p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

ب) $\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+n}=+\infty$ منه (U_n) متتالية متباعدة.

2) $\lim_{n\to+\infty} V_n=\frac{+\infty}{+\infty}$ حالة عدم التعيين.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $V_n=\frac{U_{n+1}}{U_n}=\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$

بما أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} V_n=\sqrt{1}=1$ إذن المتتالية (V_n) متقاربة.

- $W_n=\frac{U_n+U_{n+1}}{U_{n+2}}$ ، $\lim_{n\to+\infty} W_n=\frac{+\infty}{+\infty}$ عدم التعيين.

نكتب W_n : $W_n=\frac{\sqrt{1+n}+\sqrt{2+n}}{\sqrt{3+n}}$

$\lim_{n\to+\infty} W_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{1+n}}{\sqrt{n+3}}+\frac{\sqrt{2+n}}{\sqrt{3+n}}\right)=1+1=2$ إذن المتتالية (W_n) متقاربة.

تطبيق 9 دراسة تقارب متتالية و حساب نهايتها

(U_n) متتالية حدودها موجبة معرفة بـ $U_1=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n\ge1$ يكون $n^2U_n^2-(n-1)^2U_{n-1}^2=n$ ..... (I)

1) لتكن (V_n) متتالية معرفة من أجل كل $n\ge1$ بـ $V_n=n^2U_n^2$

أ) تحقق أنه من أجل كل $n\ge1$ يكون $V_{n+1}-V_n=n+1$.

ب) استنتج عبارة V_n بدلالة n.

2) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة يطلب إيجاد نهايتها.

الحل

1) أ) من المساواة (I) نجد $V_n-V_{n-1}=n$

باستبدال n بـ $n+1$ نحصل على $V_{n+1}-V_n=n+1$.

ب) من العلاقة $V_{n+1}-V_n=n+1$ نجد :

$$V_2-V_1=2$$
$$V_3-V_2=3$$
$$V_4-V_3=4$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$V_{n-1}-V_{n-2}=n-1$$
$$V_n-V_{n-1}=n$$

بجمع أطراف المساويات طرفا إلى طرف نجد $V_n-V_1=2+3+\ ....\ +n$

ومنه $V_n=V_1+2+3+\ ....\ +n$ وبما أن $V_1=1$ فإن $V_n=1+2+3+\ ....\ +n$.

V_n مجموع n حد الأولى من حدود متتالية حسابية حدها الأول 1 و أساسها 1

ومنه $V_n=\frac{n(n+1)}{2}$

2) $U_n^2=\frac{V_n}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}$ ومنه $U_n=\sqrt{\frac{n(n+1)}{2n^2}}$

بما أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$ فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n=\sqrt{\frac{1}{2}}$ وبالتالي المتتالية (U_n) متقاربة.

تطبيق 10 اتجاه تغير متتالية - تقارب متتالية

(U_n) متتالية معرفة بـ $\begin{cases} U_0=5 \\ U_{n+1}=3+\frac{U_n}{2} \end{cases}$

أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > \frac{9}{2}$

ب) استنتج اتجاه تغير (U_n)

ج) استنتج أن (U_n) متقاربة ثم عين نهايتها.

✓ الحل

أ) نسمي p_n الخاصية "$U_n > \frac{9}{2}$"

- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 5$ و $5 > \frac{9}{2}$
- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي أي $U_n > \frac{9}{2}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > \frac{9}{2}$

لدينا فرضا $U_n > \frac{9}{2}$ بالضرب في $\frac{1}{3}$ نجد $\frac{U_n}{3} > \frac{3}{2}$

وبإضافة 3 نجد $3+\frac{U_n}{3} > \frac{9}{2}$ أي $U_{n+1} > \frac{9}{2}$

إذن p_{n+1} صحيحة وبالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ب) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1}-U_n = -\frac{2}{3}(U_n-\frac{9}{2})$

بما أن $U_n-\frac{9}{2} > 0$ فإن $-\frac{2}{3}(U_n-\frac{9}{2}) < 0$ أي $U_{n+1}-U_n < 0$ مما يدل أن (U_n) متناقصة.

ج) بما أن (U_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ الذي هو جذر للمعادلة $x = f(x)$ حيث $f(x) = 3+\frac{x}{3}$

$x = 3+\frac{x}{3}$ يكافئ $\frac{2}{3}x = 3$ يكافئ $x = \frac{9}{2}$

بما أن حدود المتتالية موجبة فإن $\ell = \frac{9}{2}$ مقبول وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{9}{2}$

تطبيق 11 المتتالية المحدودة

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 1$

2) (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n = -1+\frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}$

هل المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى؟ من الأسفل؟ محدودة؟

✓ الحل

1) من أجل كل عدد طبيعي n يكون $n+1 \ge 1$ و منه $\sqrt{n+1} \ge 1$

بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 1$.

2) $U_n+1 = \frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}$ منه $|U_n+1| = \left|\frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}\right|$

بما أن $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 1$ و $0 \le |\sin n| \le 1$ فإن $0 < \frac{|\sin n|}{\sqrt{n+1}} \le 1$ أي $|U_n+1| \le 1$

هذا معناه أن $-1 \le U_n+1 \le 1$ أي $-2 \le U_n \le 0$ إذن المتتالية (U_n) محدودة.

تطبيق 12 دراسة تقارب متتالية

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع $U_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+ \dots +\frac{1}{n}$

1) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة.

2) أ) احسب $U_{2n}-U_n$ ، ب) استنتج أن $U_{2n}-U_n \ge \frac{1}{2}$

3) بفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $U_{2n} \ge \frac{n}{2}$

هل المتتالية (U_n) متقاربة؟

✓ الحل

1) $U_{n+1}-U_n = (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+ \dots +\frac{1}{n+1})-(1+\frac{1}{2}+ \dots +\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $\frac{1}{n+1} > 0$ فإن $U_{n+1}-U_n > 0$ ومنه (U_n) متزايدة

2) أ) $U_{2n}-U_n = (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \dots +\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+ \dots \frac{1}{2n}) - (1+\frac{1}{2}+ \dots +\frac{1}{n})$

$= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+ \dots +\frac{1}{2n}$

ب) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n+1 \le n+2 \le n+3 \le n+4 \le \dots \le 2n$

بالقلب نجد $\frac{1}{n+1} \ge \frac{1}{n+2} \ge \frac{1}{n+3} \ge \dots \ge \frac{1}{2n}$

إذن $U_{2n}-U_n \geq \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+ \dots +\frac{1}{2n}}_{n \text{ حدا}}$ اي $U_{2n}-U_n \geq n \times \frac{1}{2n}$

ومنه $U_{2n}-U_n \geq \frac{1}{2}$

3) بما أن $\lim \frac{n}{2}=+\infty$ فإن المتتالية (U_n) متباعدة (حسب نظرية الحصر).

تطبيق 13 البرهان بالتراجع - دراسة تقارب متتالية

1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

2) استنتج ان المتتالية (U_n) المعرفة بـ :

$U_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+ \dots +\frac{1}{n!}$ محدودة من الأعلى ومتقاربة .

✓ الحل

1) نسمي p_n الخاصية " $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ "

- p_1 صحيحة لأن $\frac{1}{1!}=1$ و $\frac{1}{2^{1-1}}=1$ و $1 \leq 1$

- نفرض ان p_n صحيحة من اجل عدد طبيعي n غير معدوم اي $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

ونبرهن ان p_{n+1} صحيحة اي $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$.

بضرب طرفي التباينة $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ في $\frac{1}{n+1}$ نجد $\frac{1}{(n+1)(n!)} \leq \frac{1}{(n+1)2^{n-1}}$

اي $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)2^{n-1}}$ .... (1)

وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$

فإن $\frac{1}{(n+1)2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^n}$ .... (2)

من (1) و (2) نجد $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

إذن p_{n+1} صحيحة بالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.

2) $\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}$

$\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2^1}$

$\vdots \quad \vdots$

$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ بجمع أطراف المتباينات طرف لطرف نجد :

$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+ \dots \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+ \dots +\frac{1}{2^{n-1}}$ أي $U_n \leq (\frac{1}{2})^0+(\frac{1}{2})^1+ \dots +(\frac{1}{2})^{n-1}$

$(\frac{1}{2})^0+(\frac{1}{2})^1+\dots+(\frac{1}{2})^{n-1}$ مجموع n حد من حدود متتالية هندسية حدها 1 واساسها $\frac{1}{2}$

ومنه $(\frac{1}{2})^0+(\frac{1}{2})^1+ \dots +(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=2-2(\frac{1}{2})^n$

إذن $U_n \leq 2\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]$

لدينا $(\frac{1}{2})^n \geq 0$ ومنه $1-(\frac{1}{2})^n \leq 1$

بالضرب في 2 نجد $2\left[1-(\frac{1}{2})^n\right] \leq 2$ إذن $U_n \leq 2$

إذن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى.

- من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{(n+1)!} > 0$

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما و بما انها محدودة من الأعلى فهي متقاربة.

تطبيق 14 المتتالية الدورية

(U_n) متتالية دورية إذا و فقط إذا وجد عدد طبيعي غير معدوم p بحيث من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+p}=U_n$

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ $\begin{cases} U_0=2 \\ U_n+U_{n+1}=5 \end{cases}$

بين ان (U_n) دورية. هل (U_n) رتيبة ؟

✓ الحل

$U_{n+p}=5-U_{n+p-1}=5-(5-U_{n+p-2})=U_{n+p-2}$

بما ان $U_{n+p}=U_n$ و $U_{n+p-2}=U_n$

فإنه ينتج من أجل كل n لدينا $n+p-2=n$ اي $p=2$

و بالتالي (U_n) دورية دورها 2 .

- $U_{n+1}-U_n=5-2U_n$

إذا كان n زوجي فإن $5-2U_n>0$ و بالتالي $U_{n+1}-U_n>0$

و إذا كان n فردي فإن $5-2U_n<0$ و بالتالي $U_{n+1}-U_n<0$

إذن إشارة $U_{n+1}-U_n$ ليست ثابتة و بالتالي (U_n) ليست رتيبة.

تطبيق 15 تعيين نهاية متتالية بطريقتين مختلفتين

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=0$ و $U_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+U_n}$

1) أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي موجب تماما $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج تقاربها.

2) أ) بين انه من اجل كل $x\in[0,\pi]$ يكون $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\cos\frac{x}{2}$

ب) بين عندئذ انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

و استنتج نهاية المتتالية (U_n).

✔ الحل

1) أ) نسمي p_n الخاصية " $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$ "

- p_1 صحيحة لأن $U_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\le 1$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n غير معدوم أي $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_{n+1}\le 1$.

لدينا $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$ بإضافة 1 إلى حدود هذه المتباينة نجد $\frac{\sqrt{2}}{2}+1\le U_n+1\le 2$

بالجذر نجد $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\le\sqrt{U_n+1}\le\sqrt{2}$ بالضرب في $\frac{\sqrt{2}}{2}$ نجد.

$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\le U_{n+1}\le 1$ لأن $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}>1$,

إذن p_{n+1} صحيحة و بالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

ب) $U_{n+1}-U_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+U_n}-U_n=\frac{\frac{1}{2}(1+U_n)-U_n^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+U_n}+U_n}=\frac{(U_n-1)(-2U_n-1)}{2(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+U_n}+U_n)}$

بما أن $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$ فإن $-2U_n-1\le 0$ و $U_n-1\le 0$ ومنه

$(U_n-1)(-2U_n-1)>0$ بالتالي $U_{n+1}-U_n>0$ أي (U_n) متزايدة

- بما أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ الذي هو جذر للمعادلة $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+x}$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+x}$ يكافئ $2x^2-x-1=0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=-\frac{1}{2})$

$x=-\frac{1}{2}$ مرفوض و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$

2) أ) لدينا من أجل كل x من $[0,\pi]$ لدينا ،

$\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=1$ و $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$

منه ينتج $\frac{1+\cos x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}$ إذن $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\left|\cos\frac{x}{2}\right|$

بما أن $\frac{x}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ فإن $\cos\frac{x}{2}>0$ ومنه $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\cos\frac{x}{2}$.

ب) نسمي p_n الخاصية " $U_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ "

- p_0 صحيحة لأن $U_0=0=\cos\frac{\pi}{2^1}$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أي $U_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1}=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

$U_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2}}=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$

منه p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)=1$

تطبيق 16 — المقارنة و النهاية

(U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ بـ:

$$U_n = \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\dots+\frac{n}{n^2+n}$$

1) بين انه من اجل كل $n\geq 1$ يكون $\frac{n^2}{n^2+n}\leq U_n\leq\frac{n^2}{n^2+1}$

2) استنتج تقارب المتتالية (U_n) ثم احسب نهايتها.

الحل ✓

1) (U_n) مجموع n حدا اصغرها $\frac{n}{n^2+n}$ واكبرها $\frac{n}{n^2+1}$

وعليه يكون $\frac{n}{n^2+n}+\dots+\frac{n}{n^2+n}\leq U_n\leq \frac{n}{n^2+1}+\dots+\frac{n}{n^2+1}$

ومنه نجد $n(\frac{n}{n^2+n})\leq U_n\leq n(\frac{n}{n^2+1})$ أي $\frac{n^2}{n^2+n}\leq U_n\leq\frac{n^2}{n^2+1}$

لأن $n^2+1 < n^2+2 < \dots < n^2+n$

2) بما ان $W_n\leq U_n\leq V_n$ حيث $V_n=\frac{n^2}{n^2+1}$ و $W_n=\frac{n^2}{n^2+n}$ و (V_n) و (W_n) متقاربتان

و لهما نفس النهاية فإن المتتالية (U_n) متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim_{n\to+\infty} V_n=\lim_{n\to+\infty} W_n=1$

تطبيق 17 — النهايات و الحصر

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $\begin{cases}U_0=4\\ U_{n+1}=\frac{1}{2}(U_n+\frac{9}{U_n})\end{cases}$

1) برهن بالتراجع أن للمتتالية (U_n) محدودة من الأسفل بـ 3

2) ادرس اتجاه تغير (U_n)

3) بين بالتراجع ان $U_n\leq 3+\frac{1}{2^n}$ ثم استنتج نهاية (U_n)

الحل ✓

1) (U_n) محدودة من الأسفل بـ 3 هذا معناه انه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n\geq 3$

نسمي p_n الخاصية "$U_n\geq 3$"

- p_0 صحيحة لأن $U_0=4$ و $4\geq 3$
- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أي $U_n\geq 3$

و نبرهن ان p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1}\geq 3$

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{9}{x}\right)$ متزايدة تماما على $[3,+\infty[$

لأن $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-9}{x^2}\right)$ و $f'(x)>0$ من أجل كل $x\geq 3$.

بما ان f متزايدة تماما على $[3,+\infty[$ و $U_n\geq 3$

فإن $f(U_n)\geq f(3)$ أي $U_{n+1}\geq f(3)$

لكن $f(3)=3$ إذن $U_{n+1}\geq 3$ وهذا يعني أن p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2) $U_{n+1}-U_n = \frac{1}{2}(U_n+\frac{9}{U_n})-U_n=-\frac{1}{2}(U_n-\frac{9}{U_n})$

$U_{n+1}-U_n=-\frac{1}{2}(\frac{U_n^2-9}{U_n}) = -\frac{1}{2}\frac{(U_n-3)(U_n+3)}{U_n}$

بما ان $U_n\geq 3$ فإن $(U_n-3)\geq 0$ و $U_n+3>0$

ومنه $-\frac{1}{2}\frac{(U_n-3)(U_n+3)}{U_n}\leq 0$

أي $U_{n+1}-U_n\leq 0$ و هذا يعني (U_n) متناقصة.

3) نسمي p_n الخاصية "$U_n\leq 3+\frac{1}{2^n}$"

- p_0 صحيحة لأن $U_0=4$ و $3+\frac{1}{2^0}=4$ و $4\leq 4$
- نفرض أن p_n صحيحة أي $U_n\leq 3+\frac{1}{2^n}$

و نبرهن ان p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1}\leq 3+\frac{1}{2^{n+1}}$.

لدينا $U_n\geq 3$ منه ينتج $\frac{9}{2U_n}\leq\frac{3}{2}$ ..... (1)

من الفرض $U_n\leq 3+\frac{1}{2^n}$ ينتج $\frac{1}{2}U_n\leq\frac{3}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}$ ..... (2)

بجمع طرفي (1) و (2) طرفا لطرف نجد $\frac{1}{2}U_n+\frac{9}{2U_n}\leq\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}$

اي $U_{n+1}\leq 3+\frac{1}{2^{n+1}}$ ومنه p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

- بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

وبما أن $3 \le U_n \le 3+\frac{1}{2^n}$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(3+\frac{1}{2^n}\right)=3$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$

تطبيق 18 المتتاليات من الشكل $U_{n+1}=aU_n+b$

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $2U_{n+1}=U_n-1$

1) احسب الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية.

2) α عدد حقيقي و (V_n) متتالية معرفة من أجل كل n بـ $V_n=U_n-\alpha$

أ) عين قيمة α حتى تكون (V_n) هندسية

ب) اكتب V_n و U_n بدلالة n ثم ادرس تقارب المتتالية (U_n)

جـ) أوجد أصغر عدد طبيعي n بحيث $U_n \in \left]-1-10^{-4}, -1+10^{-4}\right[$

✓ الحل

1) من المعطيات نجد $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n-\frac{1}{2}$

$U_1=0$ ، $U_2=-\frac{1}{2}$ ، $U_3=\frac{-3}{4}$ ، $U_4=\frac{-7}{8}$ ، $U_5=-\frac{15}{16}$

2) أ) $V_{n+1}=U_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}U_n-\frac{1}{2}-\alpha=\frac{1}{2}(V_n+\alpha)-\frac{1}{2}-\alpha=\frac{1}{2}V_n-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}$

حتى تكون (V_n) هندسية يجب أن يكون $-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}=0$ أي $\alpha=-1$

ب) $V_n=V_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $V_0=U_0+1=2$ إذن $V_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $U_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n-1$

$\lim_{n\to+\infty}U_n=-1$ ومنه (U_n) متقاربة نحو -1.

جـ) $U_n\in\left]-1-10^{-4};-1+10^{-4}\right[$ هذا معناه أن $-1+10^{-4} > U_n > -1-10^{-4}$

أي $-1+10^{-4} > \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1 > -1-10^{-4}$ و بإضافة 1 نجد $10^{-4} > \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > -10^{-4}$

المتباينة $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > -10^{-4}$ دوما محققة يبقى لنا فقط إيجاد n بحيث $10^{-4} > \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

بما أن $10^{-4} < 2^{-4}$ فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^4 > \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ومنه $4 < n-1$ أي $5 < n$ ومنه أصغر قيمة للعدد n هي 6 .

تطبيق 19 المتتاليات و الادخار

نضع في بنك مبلغ قدره 25000 DA في أول جانفي 2008 بفائدة قدرها 5% لكل سنة و نسحب في نهاية كل سنة 2500 DA.

إذا كانت U_n القيمة بالدينار للمبلغ المتبقي في البنك في السنة n (أي السنة $2008+n$)

1) أوجد علاقة تربط بين U_{n+1} و U_n

2) بين أن المتتالية (V_n) المعرفة بـ $V_n=U_n-50000$ هندسية يطلب تعيين أساسها

3) ما هي السنة التي ينفذ فيها رصيده من البنك ؟

✓ الحل

1) إذا كان U_n هو المبلغ المتبقي في السنة $(2008+n)$ و U_{n+1} المبلغ المتبقي في السنة $(2008+n+1)$ فإن $U_{n+1}=U_n+5\%\times U_n-2500$

ومنه نجد $U_{n+1}=1.05U_n-2500$

2) $V_{n+1}=U_{n+1}-50000=1{,}05U_n-2500-50000$

$=1{,}05(V_n+50000)-52500$

$=1{,}05V_n+1{,}05\times 50000-52500=1{,}05V_n$

إذن (V_n) هندسية أساسها $q=1{,}05$

$V_n=V_0q^n$ مع $V_0=U_0-50000=-25000$

ومنه $V_n=-25000(1{,}05)^n$

بما أن $U_n=V_n+50000$ فإن $U_n=-25000(1{,}05)^n+50000$

3) ينفذ رصيده من البنك هذا معناه $U_n=0$ أي $(1{,}05)^n=2$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد $n\approx 14{,}25$

ومنه السنة التي ينفذ فيها رصيده من البنك هي $2008+15$ أي 2023 .

تطبيق 20 المتتاليات من الشكل $U_{n+1}=\frac{aU_n+b}{cU_n+d}$

لتكن (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=0$ و $U_{n+1}=\frac{2U_n+1}{U_n+2}$.

1) بين بالتراجع أن $1 > U_n \ge 0$

2) بين أن المتتالية (U_n) رتيبة.

3) (V_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$

بين ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الأول.

4) اكتب V_n و U_n بدلالة n معينا نهاية (U_n)

5) اوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث من اجل كل $n \geq n_0$ يكون $U_n > 0{,}99$.

✔ الحل

1) يمكن كتابة $U_{n+1} = 2 - \frac{3}{U_n + 2}$

نسمي p_n الخاصية "$1 > U_n \geq 0$"

- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 0$ و $1 > 0 \geq 0$

- نفرض ان p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n اي $1 > U_n \geq 0$
ونبرهن ان p_{n+1} صحيحة اي $1 > U_{n+1} \geq 0$

لدينا $1 > U_n \geq 0$ منه ينتج $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{U_n + 2} > \frac{1}{3}$

بالضرب في (-3) نجد $-1 > \frac{-3}{U_n + 2} \geq -\frac{3}{2}$

وباضافة 2 نجد $1 > U_{n+1} \geq \frac{1}{2} \geq 0$ ومنه p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2) $U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 2} - U_n = \frac{-U_n^2 + 1}{U_n + 2} = -\frac{(U_n - 1)(U_n + 1)}{U_n + 2}$

بما ان $1 > U_n \geq 0$ فإن $-(U_n - 1) \geq 0$

ومنه $U_{n+1} - U_n > 0$ اي (U_n) متزايدة.

3) $V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2} - 1}{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2} + 1} = \frac{U_n - 1}{3U_n + 3} = \frac{1}{3}\left(\frac{U_n - 1}{U_n + 1}\right) = \frac{1}{3}V_n$

منه (V_n) هندسية اساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 1} = -1$

4) لدينا $V_n = V_0 q^n$ إذن $V_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$ يكافئ $U_n = \frac{V_n + 1}{1 - V}$

إذن $U_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

5) $U_n > 0{,}99$ يكافئ $\frac{0{,}01}{1{,}99} > \left(\frac{1}{3}\right)^n$ يكافئ $\frac{1}{3^4} > \frac{1}{199} > \left(\frac{1}{3}\right)^n$

و منه نجد $4 < n$ و عليه اصغر قيمة لـ n هـ، 5.

تطبيق 21 المتتاليات المتجاورة

a و b عددان حقيقيان بحيث $0 < a < b$ ،
(U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$
و $U_0 = a$ و $V_0 = b$ و $U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}$ و $V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$

1) بين انه من اجل كل n تكون (U_n) و (V_n) موجبتين تماما.

2) بين انه من اجل كل n يكون $U_n \leq V_n$

3) ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون :
$V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

ب) استنتج ان $0 \leq V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$

4) ا) بين ان المتتاليتين (V_n) و (U_n) متجاورتان.

ب) اذا كانت $a = 2$ و $b = 5$ استعمل نتائج السؤال (3) لإيجاد القيمة التقريبية للنهاية المشتركة لـ (U_n) و (V_n) بتقريب 10^{-3}.

✔ الحل

1) تبين انه من اجل كل n لدينا $U_n > 0$ و $V_n > 0$

نسمي p_n الخاصية "$U_n > 0$ و $V_n > 0$"

- p_0 صحيحة لان $V_0 = a$ و $V_0 = b$ و $a > 0$ و $b > 0$

- نفرض ان p_n صحيحة من اجل عدد طبيعي n كيفي اي $U_n > 0$ و $V_n > 0$
و نبرهن ان p_{n+1} صحيحة اي $U_{n+1} > 0$ و $V_{n+1} > 0$.

بما ان $U_n > 0$ و $V_n > 0$ فإن $\frac{U_n + V_n}{2} > 0$

اي $V_{n+1} > 0$

بما ان $U_n > 0$ و $V_n > 0$ فإن $U_n V_n > 0$
وبالتالي $\sqrt{U_n V_n} > 0$ اي $U_{n+1} > 0$
ومنه p_{n+1} صحيحة
إذن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n.

2) p_n الخاصية " $U_n < V_n$ "

– p_0 صحيحة لأن $U_0 = a$ و $V_0 = b$ و $a < b$

- نفرض ان p_n صحيحة اي $U_n < V_n$

و نبرهن ان p_{n+1} صحيحة اي $U_{n+1} < V_{n+1}$.

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} - \frac{U_n + V_n}{2}$$

$$= \frac{U_n V_n - \left(\frac{U_n + V_n}{2}\right)^2}{\sqrt{U_n V_n} + \frac{U_n + V_n}{2}} = \frac{-(U_n - V_n)^2}{4\left(\sqrt{U_n V_n} + \frac{U_n + V_n}{2}\right)}$$

بما ان $-(U_n - V_n)^2 < 0$ فإن $U_{n+1} - V_{n+1} < 0$
اي $U_{n+1} < V_{n+1}$ ومنه p_{n+1} صحيحة.
إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

3) أ) $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} - \sqrt{U_n V_n}$

(لأن $V_n < U_n$) $V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{U_n + V_n}{2} - U_n$

إذن $V_{n+1} - U_{n+1} < (V_n - U_n) \times \frac{1}{2}$

ب) نبرهن على هذه المتباينة بالتراجع.

- من أجل $n = 0$ لدينا $V_0 - U_0 = b - a$ و $b - a \leq (b-a) \times \left(\frac{1}{2}\right)^0$

نفرض ان الخاصية p_n صحيحة اي $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$

ونبرهن ان الخاصية p_{n+1} صحيحة اي $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b-a)$

لدينا $(V_{n+1} - U_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b-a)$

إذن p_{n+1} صحيحة ومنه p_n صحيحة من أجل كل n

4) أ) تعيين اتجاه تغير المتتالية (V_n)

$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + V_n}{2} - V_n = \frac{U_n - V_n}{2} < 0$ ومنه نستنتج أن (V_n) متناقصة.

- تعيين اتجاه تغير (U_n).

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n V_n} - U_n = \frac{U_n V_n - U_n^2}{\sqrt{U_n V_n} + U_n} = \frac{U_n (V_n - U_n)}{\sqrt{U_n V_n} + U_n} > 0$$

لأن $V_n - U_n > 0$ ومنه (U_n) متزايدة.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (V_n - U_n) \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a) = 0$ (حسب قاعدة الحصر)

إذن (V_n) و (U_n) متجاورتان.

ب) (1) ..... $|U_n - V_n| \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $|U_n - \ell| < 10^{-3}$ و $|V_n - \ell| < 10^{-3}$

بما ان $|U_n - V_n| \leq |U_n - \ell| + |V_n - \ell|$ فإن (2) ..... $|U_n - V_n| \leq 2 \times 10^{-3}$

حتى تكون (2) محققة يجب ان يكون $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n < 2 \times 10^{-3}$

اي $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{2}{3} \times 10^{-3}$ بالتبسيط نجد $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 66 \times 10^{-5}$

ومنه قيمة n التي تحقق المتباينة الأخيرة هي 11 إذن القيمة التقريبية لـ ℓ هي U_{11}

تطبيق 22 المتتاليات من الشكل $U_{n+1} = \frac{aU_n + b}{cU_n + d}$

(U_n) متتالية معرفة بـ $I\!N^*$ بـ $U_1 = \frac{2}{7}$ و $U_{n+1} = \frac{U_n}{3 - U_n}$

(نقبل انه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $U_n \neq 0$ و $U_n \neq 3$)

1) احسب U_2 و U_3.

2) أ) (V_n) متتالية معرفة على $I\!N^*$ بـ $V_n = \frac{1}{U_n}$ احسب V_1

ب) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون $V_{n+1} = 3V_n - 1$

3) (W_n) متتالية معرفة بـ $W_n = V_n - \frac{1}{2}$ عبر عن W_{n+1} بدلالة W_n

ثم عين W_n بدلالة n.

4) أ) استنتج عبارة U_n بدلالة n

ب) هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟

✔ الحل

1) $U_2 = \dfrac{U_1}{3-U_1} = \dfrac{\frac{2}{7}}{3-\frac{2}{7}} = \dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{19}{7}} = \dfrac{2}{19}$ ، $U_3 = \dfrac{U_2}{3-U_2} = \dfrac{\frac{2}{19}}{\frac{55}{19}} = \dfrac{2}{55}$

2) أ) $V_1 = \dfrac{1}{U_1} = \dfrac{19}{2}$

ب) $V_{n+1} = \dfrac{1}{U_{n+1}} = \dfrac{1}{\frac{U_n}{3-U_n}} = \dfrac{3-U_n}{U_n} = \dfrac{3}{U_n}-1 = 3\left(\dfrac{1}{U_n}\right)-1 = 3V_n-1$

3) $W_n = V_n - \dfrac{1}{2}$

$$W_{n+1} = V_{n+1}-\frac{1}{2} = (3V_n-1)-\frac{1}{2} = 3V_n-\frac{3}{2} = 3\left(V_n-\frac{1}{2}\right) = 3W_n$$

$$W_1 = V_1-\frac{1}{2} = \frac{19}{2}-\frac{1}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

(W_n) متتالية هندسية حدها الأول $W_1 = 9$ و اساسها $r = 3$

ومنه $W_n = W_1 \times r^{n-1}$ بالتعويض نجد $W_n = 9 \times 3^{n-1} = 3^{n+1}$

4) أ) $V_n = W_n + \dfrac{1}{2}$ و $U_n = \dfrac{1}{V_n}$

ومنه $U_n = \dfrac{1}{W_n+\frac{1}{2}}$ بالتعويض نجد $U_n = \dfrac{1}{3^{n+1}+\frac{1}{2}}$

ب) $\lim\limits_{n\to+\infty} (3^{n+1}) = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

إذن المتتالية (U_n) متقاربة نحو الصفر.

تطبيق 23 المتتاليات من الشكل $U_{n+1} = \dfrac{aU_n+b}{cU_n+d}$ - النهاية و الحصر

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \dfrac{3U_n+9}{2U_n}$

1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n \geq 0$
ثم بين ان $U_{n+1}-3$ و U_n-3 مختلفين في الإشارة.

2) أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{2n} \leq 3 \leq U_{2n+1}$

ب) استنتج انه إذا كانت (U_n) متقاربة فإن نهايتها 3.

3) استنتج انه من اجل كل n يكون $|U_{n+1}-3| \leq \frac{3}{4}|U_n-3|$ (نقبل ان $U_n \geq 2$)

4) أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $|U_n-3| \leq 2 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

ب) استنتج نهاية المتتالية (U_n).

✔ الحل

1) - من اجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 1$ والمتباينة $1 > 0$ صحيحة إذن p_0 صحيحة

- نفرض ان p_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n \geq 0$ اي $U_n > 0$

ونبرهن ان p_{n+1} صحيحة اي $U_{n+1} > 0$.

بما ان $U_n > 0$ فإن $3U_n+9 > 0$ و $2U_n > 0$

وبالتالي $\dfrac{3U_n+9}{2U_n} > 0$ اي $U_{n+1} > 0$ ومنه p_{n+1} صحيحة

إذن من اجل كل $n \geq 0$ لدينا $U_n > 0$

$$U_{n+1}-3 = \frac{3U_n+9}{2U_n}-3 = \frac{3U_n+9-6U_n}{2U_n} = \frac{3(3-U_n)}{2U_n}$$

بما ان $2U_n > 0$ فإن $(U_{n+1}-3)(3-U_n) > 0$

وبالتالي نستنتج ان $U_{n+1}-3$ و U_n-3 مختلفين في الإشارة.

2) نسمي p_n الخاصية "$U_{2n} \leq 3 \leq U_{2n+1}$"

- من اجل $n = 0$ يكون $U_0 = 1$ و $U_1 = 6$ و $1 \leq 3 \leq 6$ ومنه p_0 صحيحة

- نفرض ان p_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n \geq 0$ اي $U_{2n} \leq 3 \leq U_{2n+1}$

ونبرهن ان p_{n+1} صحيحة اي $U_{2n+2} \leq 3 \leq U_{2n+3}$

• نبرهن اولا $U_{2n+2} \leq 3$

لدينا $U_{2n+2} = \dfrac{3U_{2n+1}+9}{2U_{2n+1}} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{2U_{2n+1}}$

بما ان $\dfrac{9}{2U_{2n+1}} \leq \dfrac{3}{2}$ فإن $U_{2n+2} \leq \dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}$ اي $U_{2n+2} \leq 3$

• نبرهن ثانيا $U_{2n+3} \geq 3$

$$U_{2n+3} = \frac{3U_{2n+2}+9}{2U_{2n+2}} = \frac{3}{2}+\frac{9}{2U_{2n+2}}$$

لدينا $2U_{2n+2} \leq 6$ ومنه $\dfrac{1}{2U_{2n+2}} \geq \dfrac{1}{6}$

بالضرب في 9 نجد $\frac{9}{2U_{2n+2}} \geq \frac{3}{2}$

و بإضافة $\frac{3}{2}$ إلى طرفي هذه الأخيرة نجد $U_{2n+3} \geq \frac{3}{2}+\frac{3}{2}$

اي $U_{2n+3}\geq 3$ ومنه p_{n+1} صحيحة

إذن p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

ب) إذا كانت (U_n) متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim_{n\to+\infty} U_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty} U_{2n}=\ell$

وبالتالي $\ell\leq 3\leq \ell$ ومنه نجد $\ell=3$

3) $U_{n+1}-3=\frac{3(3-U_n)}{2U_n}$ و بالتالي $|U_{n+1}-3|=\frac{3|U_n-3|}{2U_n}$

بما ان $U_n\geq 2$ فإن $2U_n\geq 4$ ومنه $\frac{3}{2U_n}\leq\frac{3}{4}$

وبالضرب في $|U_n-3|$ نجد $\frac{3|U_n-3|}{2U_n}\leq\frac{3}{4}|U_n-3|$

اي $|U_{n+1}-3|\leq\frac{3}{4}|U_n-3|$

4) أ) نسمي p_n الخاصية " $|U_n-3|\leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ "

- p_0 صحيحة لأن $|U_0-3|=|2|=2$ و $2\leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^0$

نفرض أن p_n صحيحة اي $|U_n-3|\leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة اي $|U_{n+1}-3|\leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}$.

بضرب طرفي المتباينة $|U_n-3|\leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ في $\frac{3}{4}$ نجد $\frac{3}{4}|U_n-3|\leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

اي $|U_{n+1}-3|\leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

منه p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

ب) بما أن فإن $\lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty}|U_n-3|=0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} U_n=$

إذن المتتالية (U_n) متقاربة نحو

تطبيق 24 الدوال المستمرة و حساب نهاية متتالية

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=\frac{1}{2}$ و $U_{n+1}=-\frac{1}{3}U_n^2+2U_n$

1) احسب U_1 ، U_2

2) نرمز بـ f إلى الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x$

أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) برهن أنه إذا كان $x\in[0,3]$ فإن $f(x)\in[0,3]$.

3) استنتج من السؤال الثاني أن :

أ) المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بـ 3 .

ب) المتتالية (U_n) متزايدة.

4) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

الحل

1) $U_1=-\frac{1}{3}U_0^2+2U_0=\frac{11}{12}$ ، $U_2=-\frac{1}{3}U_1^2+2U_1=\frac{671}{432}$

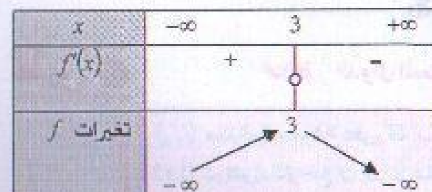
2) أ) f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$f'(x)=-\frac{2}{3}x+2$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=3$.

- إذا كان $x\rangle 3$ فإن f متناقصة تماما.
- إذا كان $x\langle 3$ فإن f متزايدة تماما.



x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
تغيرات f	$-\infty$	3	$-\infty$

ب) إذا كان $3\geq x\geq 0$ فإن $f(3)\geq f(x)\geq 0$

لأن f دالة متزايدة تماما على $[0,3]$ و منه $3\geq f(x)\geq 0$

إذن $f(x)\in[0,3]$.

3) أ) بما أن من اجل كل $x\in[0,3]$ فإن $f(x)\in[0,3]$ فإننا نستطيع تعريف المتتالية (U_n) بـ $U_{n+1}=f(U_n)$

- (U_n) محدودة من الأعلى بـ 3

هذا معناه أنه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$ يكون $U_n\leq 3$.

نبرهن على هذه المتباينة بالتراجع.

نسمي p_n الخاصية "$U_n \le 3$"

ومن اجل $n=0$ يكون $U_0=\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}\le 3$

ومنه p_0 صحيحة.

نفرض ان p_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n\ge 0$ اي $U_n\le 3$

ونبرهن ان p_{n+1} صحيحة اي $U_{n+1}\le 3$.

بما ان $0\le U_n\le 3$ فرضا و f متزايدة تماما على المجال $[0,3]$

فإن $0\le f(U_n)\le 3$ اي $U_{n+1}\le 3$

إذن p_{n+1} صحيحة.

وعليه p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n\ge 0$

ب) $U_{n+1}-U_n = -\frac{1}{3}U_n^2 + 2U_n - U_n$

$= -\frac{1}{3}U_n(U_n-3)$

بما ان $U_n\le 3$ فإن $U_n-3\le 0$ وبالتالي $-\frac{1}{3}U_n(U_n-3)\ge 0$

اي $U_{n+1}-U_n\ge 0$ إذن المتتالية (U_n) متزايدة.

4) بما ان (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

وعليه $\lim U_{n+1}=\lim U_n=\ell$

- حساب ℓ

بما ان f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة عند ℓ

وعليه ℓ هو حل للمعادلة $f(x)=x$.

$f(x)=x$ يكافئ $(x=3)$ أو $(x=0)$

$\ell=0$ مرفوض لأن الحد الأول للمتتالية هو $\frac{1}{2}$ و المتتالية متزايدة إذن $\ell=3$.

تطبيق 25 الدوال المستمرة و حساب نهايات

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=\sqrt{U_n+2}$

1) أ) برهن بالتراجع أن (U_n) متزايدة.

ب) استنتج أن (U_n) محدودة من الأعلى بـ 2 . هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟

2) أوجد نهاية المتتالية (U_n) .

✓ الحل

1) أ) (U_n) متزايدة يعني من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 0$ يكون $U_{n+1}-U_n\ge 0$

نسمي p_n الخاصية " $U_{n+1}-U_n\ge 0$ "

- من أجل $n=0$ يكون $U_1-U_0=\sqrt{3}-1$ و $(\sqrt{3}-1)>0$

ومنه p_0 صحيحة.

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 0$ أي $U_{n+1}-U_n\ge 0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+2}-U_{n+1}\ge 0$.

المتباينة $U_{n+1}-U_n\ge 0$ تعني $U_{n+1}\ge U_n$

بإضافة 2 إلى طرفي هذه الأخيرة نجد $U_{n+1}+2\ge U_n+2$

بجذر الطرفين نجد $\sqrt{U_{n+1}+2}\ge\sqrt{U_n+2}$

أي $U_{n+2}\ge U_{n+1}$

ومنه $U_{n+2}-U_{n+1}\ge 0$ إذن p_{n+1} صحيحة.

ومنه p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 0$

ب) $U_{n+1}-U_n=\sqrt{2+U_n}-U_n=\frac{2+U_n-U_n^2}{U_n+\sqrt{2+U_n}}=\frac{-(U_n-2)(U_n+1)}{U_n+\sqrt{2+U_n}}$

- بما أن $U_n+\sqrt{2+U_n}>0$ و $U_n+1>0$ و $U_{n+1}-U_n\ge 0$ فإن $-(U_n-2)\ge 0$

ومنه نستنتج $U_n\le 2$ وهذا يعني أن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بـ 2

- بما أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

2) بما أن (U_n) متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty}U_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}U_n=\ell$

- بما أن الدالة $f:x\mapsto\sqrt{2+x}$ مستمرة عند العدد الحقيقي ℓ فإن ℓ جذر للمعادلة $x=f(x)$

$x=f(x)$ يكافئ $x^2-x-2=0$ يكافئ $x=2$ أو $x=-1$

بما أن حدود المتتالية موجبة فإن $\ell=2$.

تمارين و مسائل

1- المتتالية (U_n) معرفة من أجل $n \geq 3$ بـ $U_n = \frac{4n+2}{n-2}$ لها نهاية عند 4 .
أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث من أجل $n \rangle n_0$ يكون $U_n \in \left]3.99 . 4.01\right[$

2- (U_n) المتتالية المعرفة على IN^* بـ $U_n = n^2 - n$ لها نهاية $+\infty$
أوجد عدد طبيعي n_0 بحيث من أجل كل $n \geq n_0$ يكون $U_n \in \left]10^8 , +\infty\right[$

3- (U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}}$
أحسب U_n من أجل كل عدد طبيعي n ثم استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

4- (U_n) المتتالية معرفة من أجل كل n بالعبارة $U_n = \frac{1}{n!}$
1) أحسب $U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5 , U_6$
2) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $0 \langle U_n \leq \frac{1}{n}$
3) استنتج نهاية (U_n) .

5- (U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = n + 1 - \sin n$
بين من أجل كل عدد طبيعي n يكون $n \leq U_n \leq n+2$ ثم استنتج نهاية (U_n) .

6- (U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = \frac{n^4}{n!}$ من أجل كل $n \geq 1$
1) أحسب الحدود السبعة الأولى .
2) أ) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 5$ يكون $n! \geq (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$
ب) استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

7- ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية المتتالية (U_n) :
أ) $U_n = \frac{-n+5}{2n+1}$ ب) $U_n = \frac{2n+1}{3n+1}$ جـ) $U_n = -n^2 + \frac{3}{2n+2}$
د) $U_n = \frac{6n^2-3n+9}{n^2+n+3}$ و) $U_n = \frac{7n+5}{2n^2+3}$ ي) $U_n = \frac{6n^2+2}{7n+3}$

8- ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية المتتالية (U_n) :
أ) $U_n = \sqrt{\frac{3}{2n+1}}$ ب) $\sin\left(\frac{3\pi n}{2n+1}\right)$ جـ) $U_n = 1 - \frac{3}{n!}$
د) $U_n \frac{\sqrt{n+2}}{n+3}$ و) $U_n = \sqrt{2n^4+n^3} - \sqrt{2n^4}$ ي) $U_n = \frac{5n-25n^2+1}{\sqrt{n^2+6}}$

9- أوجد نهاية كل متتالية من المتتاليات (U_n) ، (V_n) ، (W_n) ، (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بالعبارات التالية :
$$U_n = \frac{n^2+2}{n+3} \ , \ V_n = \frac{U_n}{n+1} \ , \ W_n = U_n - n + 2 \ , \ t_n = \frac{V_n - 1}{W_n - 1}$$

10- (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على IN بـ:
$U_0 = 4$ و $U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 5$ و $V_n = U_n - \frac{20}{3}$
1) أ) برهن أن المتتالية (V_n) هندسية. ب) احسب V_n ثم U_n بدلالة n .
2) نضع $S_n = V_0 + V_1 ..... + V_n$ و $S_n' = U_0 + U_1 + \ldots\ldots + U_n$
احسب S_n و S_n' بدلالة n ثم استنتج نهاية المتتاليتين (S_n) و (S_n')

11- في كل حالة من الحالات التالية عين بيانا الحدود الأولى للمتتاليات المقترحة ثم خمن اتجاه تغير و نهاية هذه المتتالية :
أ) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 2 \end{cases}$ ، ب) $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5 \end{cases}$ ، جـ) $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = -\frac{1}{3}U_n \end{cases}$

12- ادرس تقارب المتتالية (U_n) في كل حالة من الحالات التالية :
أ) $U_n = 2n^2 - 3n + 4$ ، ب) $U_n = \frac{n^3+2n}{n^2+n}$ ، جـ) $U_n = 5(0.3)^n$

د) $U_n=\frac{5^n}{7^n}$ ، و) $U_n=\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)\times(0,2)^n$

13 - (U_n) متتالية معرفة من اجل كل $n\geq 4$ بـ $U_n=\frac{1}{n^2-5n+6}$

بين أن (U_n) محدودة من الأعلى بـ $\frac{1}{2}$

(يمكنك الاستعانة بدراسة الدالة $f(x)=x^2-5x+6$).

14 - في كل حالة من الحالات التالية هل المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى ؟ من الأسفل ؟ محدودة ؟

أ) $U_n=\cos n$ ، ب) $U_n=3-\frac{1}{n}$ ، جـ) $U_n=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$

د) $U_n=\sqrt{5n+3}$ ، و) $U_n=n+2+\cos n$

15 - ادرس تقارب أو تباعد كل متتالية من المتتاليات التالية باستعمال نظريات الحصر :

أ) $U_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\sin(3n)$ ، ب) $U_n=\frac{n+1}{3+\cos 2n}$

جـ) $U_n=\frac{n-\sin n}{n^2+3}$ ، د) $U_n=\frac{2^n+1}{3^{n+2}-1}$

16 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بالعبارة $U_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.....+\frac{1}{n^2}$

1) بين ان المتتالية (U_n) متزايدة.

2) أ) بين بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ لدينا $U_n\leq 2-\frac{1}{n}$

ب) ماذا تستنتج فيما يخص المتتالية (U_n) ؟

17 - من اجل كل عدد طبيعي n نضع $U_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

1) أوجد العددين الحقيقيين A و B بحيث انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}$.

2) من اجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n=U_0+U_1+.....+U_n$ عين عبارة S_n بدلالة n ثم أوجد نهاية المتتالية (S_n) .

18 - ادرس تقارب المتتالية (U_n) في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $U_n=\frac{n!}{2^n-1}$ ، ب) $U_n=\frac{n!}{4^n}$ ، جـ) $U_n=\frac{2^n+3}{4^n}$

19 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $\begin{cases} U_0=2 \\ 4U_{n+1}=U_n+3 \end{cases}$

1) عين الستة الحدود الأولى و عين القيمة ℓ التي تقترب منها هذه الحدود.

2) لتكن (V_n) متتالية معرفة بـ $V_n=U_n-\ell$ برهن أن (U_n) متقاربة نحو ℓ .

20 - اجب بنعم أو لا عن كل سؤال من الأسئلة المطروحة مبرر الإجابة.

لتكن (U_n) متتالية معرفة بحدها الأول U_0 ينتمي إلى مجال $]1+\infty[$ و العلاقة التراجعية $U_{n+1}=\sqrt{3U_n-2}$ من أجل كل عدد طبيعي n

1) (U_n) رتيبة

2) (U_n) محدودة من الأسفل بالواحد.

3) إذا كان $U_0\in]1,2[$ فإن (U_n) متقاربة نحو 1.

4) إذا كان $U_0\in]1,2[$ فإن (U_n) متقاربة نحو 2.

5) إذا كان $U_0\in]2,+\infty[$ فإن (U_n) متقاربة نحو 2.

21 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=U_n-\frac{1}{3}(U_n)^3$

1) بين بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n\in[0,1]$

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

3) بين ان المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

22 - لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=\frac{U_n}{2+U_n^2}$

1) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n>0$

2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1}<\frac{U_n}{2}$ ثم استنتج أن $U_n<\frac{U_0}{2^n}$

3) بين ان المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

23 - لتكن (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ

$U_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+.....+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

1) برهن انه من اجل كل $n\geq 1$ يكون $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

2) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟

24 - (U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ $U_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

1) برهن انه من اجل كل $n\geq 1$ يكون $\frac{1}{2\sqrt{n}} \geq U_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

2) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟

3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ بالعبارة ؛ $V_n=\frac{u_1+u_2+\ ...\ +U_n}{\sqrt{n}}$. ما هي نهاية (V_n) ؟

25 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=\frac{2}{3}(U_n+1)$

1) برهن ان المتتالية (V_n) المعرفة من اجل كل n بـ $V_n=2-U_n$ هندسية.

2) استنتج عبارة U_n بدلالة n ثم نهاية (U_n).

26 - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=-2$ و $U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n-1$ و $V_n=U_n+3$

1) برهن ان (V_n) هندسية.

2) عبر عن V_n ثم U_n بدلالة n ثم استنتج نهاية (U_n).

3) (S_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $S_n=U_0+U_1+\ .....\ +U_n$

عبر عن S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية (S_n).

27 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=2$ و $U_{n+1}=2U_n-\frac{1}{3}$ و (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $V_n=U_n-\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

1) اوجد α بحيث (V_n) هندسية.

2) هل (V_n) متقاربة.

3) عبر عن V_n بدلالة n ثم أحسب $S_n=V_0+V_1+\ .....\ V_n$ ثم استنتج قيمة $S'_n=U_0+U_1+\ ....\ +U_n$

28 - ندرس عدد البكتيريا المسببة لمرض التفويد في لتر واحد من ماء يحتوي في البداية على 300 بكتيريا. لاحظنا انه في كل دقيقة يزداد عدد البكتيريا بالعامل 1,0372 مع العلم انه في كل دقيقة تموت بكتيريا واحدة.

1) إذا رمزنا بـ U_n إلى عدد البكتيريا الحية حتى الدقيقة n أكتب U_{n+1} بدلالة n

2) نضع $V_n=U_n-\frac{1}{0.037}$

أ) بين أن (V_n) هندسية ثم أحسب حدها العام بدلالة n .

ب) ما هو عدد البكتيريا الحية خلال 30 دقيقة.

3) نريد تحسين هذه الدراسة بحيث ولا بكتيريا تموت خلال التجربة ولتكن W_n عدد البكتيريا الموجودة خلال n دقيقة.

عبر عن W_n بدلالة n ثم احسب عدد البكتيريا الحية خلال 30 دقيقة.

كم عدد البكتيريا التي تم انقاضها ؟

29 - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ :

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ ....\ +\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+2}$$

$$V_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ ....\ +\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+2}$$

هل المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان ؟

30 - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}^*$ بـ $U_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ ....+\frac{1}{n!}$

و $V_n=U_n+\frac{1}{n!}$

1) بين أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.

2) احسب U_7 و V_7 ثم استنتج قيمة مقربة للنهاية المشتركة ℓ .

3) بين ان ℓ ليس عددا ناطقا.(استعمال البرهان بالخلف)

ثم تحقق من أن $U_b < \ell < V_b$

31 - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=-1$ و $V_0=2$.

و $V_{n+1}=\frac{U_n+4V_n}{5}$ و $V_{n+1}=\frac{U_n+V_n}{2}$

1) أ) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم أن $U_n < V_n$

ب) برهن أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.

2) اوجد العددين الحقيقيين المختلفين a و b

بحيث ان المتتاليتين (S_n) و (t_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ :

$S_n=U_n+aV_n$ و $t_n=U_n+bV_n$ هندسيتان (ثابتتان).

3) أ) عبر عن S_n و t_n بدلالة n.

ب) احسب نهاية المتتاليتين (U_n) و (V_n).

-32 (U_n) متتالية معرفة على IN بـ $U_0=-3$ و $U_{n+1}=\frac{U_n-8}{2U_n-9}$

1) أ) مثل بياننا الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{x-8}{2x-9}$

ب) استعمل المنحنى البياني للدالة f لتخمين طبيعة المتتالية (U_n).

2) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n < 1$

3) برهن أن المتتالية (U_n) متزايدة ومتقاربة

4) (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $V_n=1-U_n$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $V_{n+1} < \frac{1}{7}V_n$ ثم استنتج نهاية (V_n)

5) أ) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟

ب) أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث من أجل كل عدد طبيعي $n > n_0$ يكون $U_n > 0{,}99$

-33 (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان بـ $U_0=2$ $U_{n+1}=\frac{U_n^2+5}{2U_n}$ و $V_n=\frac{U_n-\sqrt{5}}{U_n+\sqrt{5}}$

1) أ) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$ يكون $V_{n+1}=V_n^2$

ب) استنتج أنه من أجل كل $n\geq 0$ يكون $V_n=(V_0)^{2^n}$

2) أ) احسب V_0 ثم برهن أن $|V_0|\leq\frac{1}{16}$

ب) عين نهاية المتتالية (V_n) ، جـ) استنتج نهاية المتتالية (U_n).

-34 (U_n) متتالية معرفة على IN^* بـ $U_1=\frac{3}{2}$ و $U_{n+1}=\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{2}{u_n}\right)$

1) برهن أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $U_n > 0$

2) برهن أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $U_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\frac{(U_n-\sqrt{2})^2}{U_n}$

ثم استنتج أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $U_n > \sqrt{2}$

3) أ) برهن أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $U_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(U_n-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{U_n}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\geq 1$ لدينا $U_{n+1}-\sqrt{2}\leq\frac{1}{2^n}$

4) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

-35 (U_n) متتالية معرفة على IN بـ $U_0=0$ و $U_{n+1}=\sqrt{6+U_n}$

1) أحسب U_1 ، U_2 ، U_3.

2) برهن أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 3 ماذا تستنتج ؟

3) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟ (لحساب النهاية استعن بالدالة $x \xrightarrow{f} \sqrt{x+6}$)

-36 (U_n) متتالية معرفة على IN بـ $U_0 > \frac{-5}{4}$ و $U_{n+1}=\sqrt{5+4U_n}$

1) ارسم (C_f) بيان الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\sqrt{5+4x}$ ثم عين نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x$

2) نفرض في هذا السؤال أن $U_0=6$ ،

أ) برهن أن المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل.

ب) ادرس تغيرات المتتالية (U_n) ثم استنتج أن (U_n) متقاربة و احسب نهايتها.

3) أ) برهن أن النتائج المحصل عليها سابقا (في السؤال 2) تبقى صحيحة في حالة $U_0 > 5$

ب) هل نتائج (السؤال 2) تبقى صحيحة في حالة $0 < U_0 < 5$ ؟

جـ) ماذا تصبح المتتالية في حالة $U_0=5$ ؟

-37 (U_n) متتالية معرفة على IN بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=1+\frac{1}{U_n}$

1) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > 0$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $2\geq U_n\geq\frac{3}{2}$

2) لتكن f الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=1+\frac{1}{x}$

برهن أنه من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ومن أجل كل $y\geq\frac{3}{2}$ يكون،

$$|f(x)-f(y)|\leq\frac{4}{9}<|x-y| \quad ...... \quad (1)$$

3) أ) إذا كانت المتتالية (U_n) متقاربة فما هي قيمة نهايتها ℓ ؟

ب) برهن باستعمال (1) أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $|U_{n+1}-\ell|\leq\frac{4}{9}|U_n-\ell|$

جـ) استنتج بالتراجع أن $|U_n-\ell|\leq\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}|U_1-\ell|$

د) برهن عندئذ أن (U_n) متقاربة نحو ℓ.

-38 (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$U_n=\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\ ....\ +\sin\frac{n}{n^2}$$